**Вибрані питання**

**розв’язування завдань з параметрами**

Зміст

Вступ 4

РОЗДІЛ І Розв’язування завдань з параметрами для всіх можливих значень параметра 6

РОЗДІЛ ІІ Знаходження розв’язків завдань з параметрами, на які накладаються певні умови 13

РОЗДІЛ ІІІ Графічний спосіб розв’язування завдань з параметрами 23

Література 29

Задачі з параметрами сприяють формуванню інтелектуальних умінь, розвитку логічного мислення і математичної культури, та їх розв’язування пов’язане зі значними труднощами. Це пов’язане з тим, що кожна задача з параметрам , передбачає розв’язування не однієї, а цілої низки різноманітних математичних задач: рівнянь, нерівностей тощо.

Працюючи з параметром слід пам’ятати про його двояку природу. З одного боку слід сприймати параметр як число, а з іншого – як невідоме, поведінку якого слід передбачити і врахувати при отриманні розв’язку задачі. Наприклад при добуванні кореня парного степеня, при діленні на вираз, що містить параметр потрібно проводити додаткові дослідження, що впливатимуть на остаточну відповідь.

У збірнику запропоновано розв’язки завдань з параметрами, що пропонувалися на ЗНО з 2010 по 2017 рік. Розглянуто різні способи та прийоми розв’язування таких завдань.

РОЗДІЛ І

Розв’язування завдань з параметрами для всіх можливих значень параметра

1. Розв’яжіть рівняння для всіх значень параметра а

.

Розглянемо область допустимих значень рівняння

Отже, враховуючи,що , тоді

***Відповідь: якщо а – парне, то рівняння має два розв’язки і ;***

***якщо а – непарне, то рівняння має один розвозок і .***

1. Розв’яжіть рівняння для всіх значень параметра а

Врахувавши область визначення отримаємо систему рівнянь та нерівностей:

Оскільки то

Розв’яжемо перше рівняння системи

Повернемося до системи:

Перевіримо,при якому значенні параметра а існуватиме корінь .

Перевіримо,при якому значенні параметра а існуватиме корінь .

Отже, а, тоді .

***Відповідь: якщо* ), то ;**

***якщо* , то ;**

***якщо* ) і , то**

3. Розв’яжіть рівняння для всіх значень параметра а

Врахувавши область визначення отримаємо систему рівнянь та нерівностей:

Розв’яжемо третє рівняння системи:

Повернемося до системи:

Оскількизадовольняє умову *,* то х=0 при =0. Тоді

Перевіримо, при якому значенні параметра а існуватиме корінь x=2-а:

Отже, якщо а∈ [-2;8), то x=2-а. Корінь х=0 задовольняє умову а умову, при а0.

**Відповідь: якщо a∈(-∞;-2), то x;**

**якщо a∈[-2;0), то x=2-a;**

**якщо a∈[0;8), то x=2-a, x=0;**

**якщо a∈[8;+ ∞), то x=0.**

4. Розв’яжіть нерівність для всіх значень параметра а

Знайдемо область визначення рівняння: .

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату:

При піднесенні обох частин нерівності до квадрату слід врахувати два випадки:

*Оскільки а≠0, то*

**Відповідь: якщо a∈(-∞;0], то x∈∅;**

**якщо a∈(0;2), то x∈(-a;a);**

**якщо a∈[2;4], то.**

5. Розв’яжіть систему рівнянь для всіх значень параметра а

Розкривши модуль отримаємо сукупність двох систем:

|  |
| --- |
| Оскільки умова суперечить то друга система не має розв’язку. |

Розв’яжемо третю нерівність системи:

 ;

 **.**

Розв’яжемо четверте рівняння системи:

Повернемося до системи:

 ;

Оскільки і , тоді , .

Перевіримо, при яких значеннях параметра а корені та задовольняють умову .

Повернемося до систем:

**Відповідь: якщо a∈(-∞;), то x=;;**

**якщо a∈[;0], то x∈∅; y=∈∅;**

**якщо a∈(0; +∞), то x=, .**

Розділ ІІ

Знаходження розв’язків завдань з параметрами, на які накладаються певні умови

1. При яких значеннях параметра а рівняння має чотири корені

Введемо заміну =t, t>0.

Оскільки t>0, то , a>0. Повернемося до заміни:=a. Використаємо формулу квадрата двочлена =, отримаємо=a.

 =a;

Розкриємо модуль:

Перевіримо при яких значеннях параметра а отримані корені задовольняють умови:

0

-3 ; -

 ;

 a27; ; a<27.

a

27

**Відповідь: .**

2. При якому значенні параметра *а* корінь рівняння належить проміжку (

Врахуємо область визначення рівняння:

Отримаємо, , *n∈Z*, .

Оскільки , то

Звідси виплаває, що =4, тоді Знайдемо значення параметра, при якому .Оскільки , і =0, то

Відповідь: .

3. Знайдіть найменше значення параметра а, при якому рівняння має додатній корінь

Прологарифмуємо обидві частини рівняння з основою 2:

Оскільки (D<0), то

Отже, то тоді ;

Обчислимо значення х при , ,

 , ,

, .

Знайдемо найменше значення параметра а, при якому існує додатний корінь .

, ,

**Відповідь: .**

4. Знайдіть усі значення параметра а, при якому добуток коренів рівняння

 , дорівнює 8.

Введемо заміну , тоді отримаємо рівняння

якщо , то рівняння має два корені:

Повернемося до заміни

Обчислимо добуток коренів

Оскільки добуток коренів дорівнює 8, то =8,

Врахувавши умову , отримаємо

**Відповідь:**

5. При якому найменшому *а* рівняння має хоча б один корінь

Введемо заміну

Оскільки не задовольняє умову , тоді для існування хоча б одного кореня необхідно виконання умови

**Відповідь:**

6. Вкажіть найменше значення параметра, при якому рівняння має рівно один корінь

Розв’яжемо перше рівняння системи:

Отримаємо

Рівняння матиме один корінь, якщо 0, при , тоді .

Якщо ж , то рівняння має два корені Для того, щоб рівняння мало рівно один корінь, один з розв’язків не повинен входити в область визначення рівняння, тому

тже, існує при , а - при і  *.*

Рівняння має рівно один корінь при та .

**Відповідь: .**

7. При якому найменшому цілому значенні *а* рівняння має лише два різні корені

Рівняння рівносильне системі:

Розв’яжемо рівняння з модулем для всіх значень параметра а.

 При та при, рівняння має безліч розв’язків, тому розглядаємо випадок , .

Повернемося до системи

Врахуємо умову , та отримаємо обмеження на параметр *а:*

Отже, . Найменше ціле з цих значень

**Відповідь: -10**

8. Знайдіть найбільше значення параметра а, при якому система має безліч розв’язків

Введемо заміну Отримаємо систему лінійних рівнянь відносно змінних і та параметра .

Розв’яжемо систему рівнянь способом додавання, домножимо перше рівняння на , отримаємо:

Повернемося до заміни:

Оскільки , то

Найбільше значення параметра, при якому система має безліч розв’язків .

**Відповідь: 1,5**

РОЗДІЛ ІІІ

Графічний спосіб розв’язування завдань з параметрами

1. Знайдіть найбільше значення параметра *а*, при якому рівняння

 має тільки чотири корені.

Розглянемо функцію . Графіком функції є парабола, вітками направлена вгору, з вершиною у точці (1,5; -6,25). Нулі функції: х=4, х=-1.

Використовуючи геометричні перетворення графіка функції , отримаємо графік функції . Для визначення кількості коренів рівняння , знайдемо точки перетину графіків функції і =.

Використовуючи геометричну інтерпретацію розв’язків рівняння, отримаємо чотири розв’язки рівняння при i .

**Відповідь: .**

2. Знайдіть найбільше значення параметра, при якому система рівнянь має один розв’язок.

Графіком рівняння є коло з центром (0;0), радіус 9. Графіком другого рівняння. Оскільки система рівнянь має один розв’язок, кола дотикаються внутрішнім або зовнішнім способом, як показано на рисунку:

Отже, система має один розв’язок при *a*=7, *a*=11. Найбільше значення *a*=11.

**Відповідь: *a*=11.**

3. Знайдіть усі значення параметра *а,* при якому система рівнянь має тільки три розв’язки.

Розв’язком першого рівняння є сукупність точок, що належать прямим , Графіком другого рівняння є коло з центром (0; 0) і радіусом . Оскільки система рівнянь має три розв’язки, то коло з центром (0; 0) і радіусом повинно перетинати пряму та дотикатися до прямої , як показано на рисунку:



Отже, радіус кола дорівнює 4, тоді =4,

**Відповідь:**

4. При якому найбільшому від’ємному значенні параметра *a,* рівняння , має один корінь.

,

Розглянемо рівняння . Кількість коренів рівняння визначимо графічно. Побудуємо графіки функцій , .

Рівняння має один розв’язок при найбільшому від’ємному значенні параметра а, якщо пряма дотикається до графіка функції . Знайдемо координати точки А – точки дотику.

Використаємо геометричний зміст похідної: , знайдемо, якщо .

Знайдемо ординату точки А, якщо абсциса :

Оскільки А(; ), обчислимо значення параметра *а* з рівняння дотичної *y=2x+a*.

**Відповідь:**

5. Знайдіть усі від’ємні значення параметра , при яких система має єдиний розв’язок.

Подамо систему рівнянь у вигляді:

Побудуємо графік першого рівняння:

Графіком другого рівняння є сукупність прямих:

Y=-5x

-7

3

-3

5

Y=5x

Y=2

Отже, система має єдиний розв’язок, якщо прямі проходять через точку (-3; 2). Знайдемо значення параметра :

**Відповідь:**

Література

1. Апостолова Г.В., Ясінський В.В. Перші зустрічі з параметрами. – К.: Факт, 2008. – 324 с.

2. Апостолова Г.В. Хитромудрий модуль. К.: Факт, 2006. – 256 с.

3. Апостолова Г.В. Я сам! К.: Факт, 1997. – 202 с.

4. Горштейн П. І., Полонський В. Б., Якір М. С. Задачі з параметрами. – К.: РІА “Текст”; МП “ОКО”, 1992. – 290 с.

5. Назаренко О.М., Назаренко Л.Д. тисяча і один приклад. Рівності і нерівності. – Суми: “Слобожанщина”, 1994. – 272 с.

6. Фількенштейн Л. П. Домашній репетитор. Вибрані глави конкурсної математики в методах і задачах. Книга четверта. Параметри. – К.: Євро індекс Лтд, 1995. – 210 с.

7. Ястребинецький Г. А. Задачі з параметрами. – М.: Просвещение, 1986. – 128 с.

8. Лобанова Л. В., Фількенштейн Л. П. Вибрані задачі елементарної математики. – К: Вища школа, 1989. – 115 с.