*Щоб уміти розв’язувати задачі треба їх розв'язувати*

**ЗАДАЧІ НА ФАРБУВАННЯ**

Є багато задач, у яких задані фігури розфарбовують різними кольорами. При цьому розуміють, що фігуру фарбують в декілька кольорів, якщо кожній точці фігури поставлено у відповідність один із цих кольорів.

Є задачі в яких розфарбування вже задано. А є задачі, умова яких не містить фарбування, проте ідея певного розфарбування допомагає розв’язати задачу.

**1.** Чи може кінь пройти з поля А-1 шахівниці на поле Н-8, побувавши по дорозі на кожному з решти полів по одному разу?

*Розв`язання*

Щоб обійти всі клітинки шахової дошки треба зробити 63 ходи. Після кожного ходу змінюється колір клітинки, на якій стоїть кінь. Після кожного непарного ходу кінь знаходиться на білій клітинці, а після парного – на чорній.

Тоді після 63-ого кроку маємо білу клітинку, а Н-8 – чорна. Отже, він не зможе опинитись на у клітинці Н-8.

*Відповідь* : ні.

**2.**  У кожній клітинці дошки 5х5 сидить жабенятко. По команді жабеняти плигають на сусідні клітинки. При тому сусідніми вважаються клітинки, що мають спільну сторону. Доведіть, що при цьому принаймні одна клітинка залишиться порожньою .

*Доведення.*

Розмалюємо дошку 5х5 в шаховому порядку. Нехай в результаті цього отримали 13 клітинок чорного та 12 білого кольору.

Коли жабенята плигають – вони змінюють колір клітинки. Тому 12 жабенят, які знаходилися спочатку в клітинках білого кольору, не зможуть зайняти всі 13 клітинок чорного кольору.

**3.** У кожній клітинці дошки 5х5 сидить жабенятко. По команді жабеняти плигають на сусідні клітинки. При тому сусідніми вважаються клітинки, що мають спільну вершину. Доведіть, що при цьому завжди залишаться порожні клітинки. Скільки клітинок обов’язково залишаться вільними?

*Доведення.*

Розмалюємо дошку 5х5 рядочками. Маємо 15 чорних і 10 білих клітинок. Тому 10 жабенят, які знаходилися спочатку в клітинках білого кольору, не зможуть зайняти всі 15 клітинок чорного кольору. Хоча б 5 клітинок залишаться вільними.

**4.** Мишка гризе куб сиру, складений із 27 одиничних кубиків. З`ївши один кубик, вона переходить до сусіднього з ним через спільну грань. Чи може мишка з`їсти в такий спосіб увесь куб, окрім центрального кубика?

*Розв`язання*

Розмалюємо кубики у два кольори так, щоб кожні два сусідні кубики, що мають спільну грань, були різного кольору. Кубиків, колір яких співпадає із кольором центрального кубика, буде 13, а кубиків другого кольору – 14.

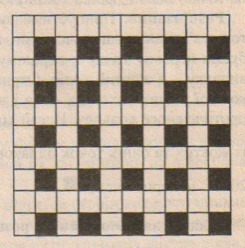
Дотримуючись умови задачі, мишка почергово мінятиме кольори з`їдених кубиків, а тому серед 26 таких кубиків буде по 13 кубиків кожного кольору. Тому центральний кубик залишитися не може.

*Відповідь* : ні.

**5.** Дно коробки розміром 10х10 вимощене плитками розміром 1х4 та 2х2. Одну з цих плиток розміром 1х4 загубили, але в запасі є плитка розміром 2х2. Чи можна наявними плитками знову вимостити дно коробки?

*Розв`язання*

Розіб`ємо дно коробки на квадрати та зафарбуємо деякі клітинки так, як показано на малюнку



Тоді кожна плитка 2х2 покриває рівно одну зафарбовану , а кожна плитка 1х4 покриває дві або жодної з пофарбованих клітинок. Оскільки зафарбованих клітинок 25, то для вимощення дна коробки потрібно непарну кількість плиток 2х2. Тому нове вимощення дна коробки неможливе.

*Відповідь*: ні.

**6.** Кожну грань кубикаподілили на 4 квадрати, кожний з отриманих квадратів пофарбували в один з кольорів - червоний, синій, зелений – так, щоб квадратики, що мають спільну сторону, були пофарбовані в різні кольори. Доведіть, що при цьому обов’язково буде 8 синіх, 8 червоних і 8 зелених квадратиків.

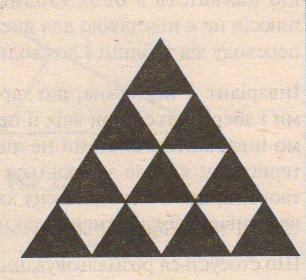
*Доведення*

Розглянемо 8 квадратиків, що мають за спільну вершину – вершину кубика. За умовою всі вони повинні бути різних кольорів. Звідси випливає твердження задачі.

**7.** Замок має форму рівностороннього трикутника зі стороною 36м. Він розбитий на 16 трикутних залів зі сторонами 9м. Між сусідніми залами є двері. Довести, що коли людина захоче пройти по замку, побувавши в кожному залі не більше одного разу, то вона зможе оглянути не більше 13 залів.

*Доведення*

Розмалюємо зали так, як показано на малюнку.

 При обході замку людина повинна буде почергово переходити із замальованих у незамальвані зали, кількість яких відповідно дорівнює 10 та 6. Тому вона зможе відвідати не більше 7 замальованих залів, разом не більше 7+6=13 всіх залів замку. *Щ. в д.*

**7**. Чи можна розрізати квадрат  на 25 прямокутників ? Відповідь обґрунтуйте.

*Відповідь*: Ні .

*Пофарбуємо дошку в чотири кольори (див. мал.). Довільна фігурка (прямокутник ) містить по одній клітинці кожного кольору , а клітинок першого і другого кольору різна кількість.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 |

*Мал. 4*

**«Підготовчі» задачі теми**

1. Скільки треба кубиків із стороною 1 см, щоб скласти з них кубик із стороною: а) 4 см; б) 5 см; в) *а* см?
2. Квадрат поділили на квадрати із стороною 1 см та розфарбували у два кольори «шахматкою», тобто так, щоб два сусідні за стороною квадрати були різних кольорів. Скільки квадратів кожного кольору отримали, якщо довжина сторони великого квадрата дорівнює: а) 4 см; б) 5 см; в) 14 см; г) 25 см; д) n см?
3. Розв’яжіть попередню задачу, коли фарбування здійснили рядочками завширшки 1 см.
4. Куб складено з маленьких однакових кубиків. Усі грані куба, окрім однієї, пофарбували в синій колір. Скільки маємо маленьких кубиків з трьома синіми гранями, двома синіми гранями, однією синьою гранню та нефарбованих кубиків, якщо довжина ребра куба дорівнює: а) 4; б) 7; в) 25; г) n довжинам ребра маленького кубика?

Куб печива складається з кубиків шоколадного та молочного печива (одного

1. розміру) так, що два сусідні за гранню кубики мають різні кольори. Скільки кубиків кожного сорту містить великий куб, якщо довжина сторони великого куба дорівнює довжині: а) 17 сторін маленького; б) 117 сторін маленького; в) n сторін маленького кубика?
2. Куб печива складається з кубиків шоколадного та молочного печива (одного розміру) так, що два сусідні за гранню кубики мають різні кольори. Довжина сторони великого куба дорівнює довжині 7 сторін маленького. Миша гризе куб печива так, що після того, як з’їсть маленький кубик печива одного сорту переходить до печива іншого кольору. Чи може таке бути, що останнім залишиться центральний кубик? Відповідь обґрунтуйте