**Завдання 2-го етапу Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2013 р.**

**6 клас**

1. Скільки колод розпиляли на дрова, якщо всього зробили 64 розпили і одержали 88 чурбаків?
2. В корзині знаходяться 17 яблук. Дозволяється за одне зважування на терезах зі стрілкою знайти сумарну вагу двох *яблук. Яку найменшу кількість таких зважувань треба зробити, щоб узнати вагу всіх яблук в корзині?*
3. *Як можна відміряти 9 хв. за допомогою піскових годинників на 5 та на 7 хв.?*
4. Леся написала на дошці декілька різних натуральних чисел. Андрійко не зміг серед них вибрати трьох, сума яких кратна 3. Скільки щонайбільше чисел могла написати на дошці Леся?
5. На планеті Кругляндія карту країн утворюють 2013 кіл. Доведіть, що для розфарбування цієї карти так, щоб сусідні країни було розфарбовані у різні кольори, вистачить дві фарби.

**Завдання 2-го етапу Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2013 р.**

**7 клас**

1. Знайдіть двозначне число, яке на 66 більше добутку його цифр.
2. Перевірте, чи є число 201420134 + 4 простим.
3. Куб розрізали на 2013 × 2013 × 2013 маленьких кубиків. Спочатку в кожному маленькому кубику сидів жук. Потім кожний жук переповз у сусідній кубик (сусідніми вважаються кубики, які мають спільну грань). Чи можливо, щоб після цього в кожному маленькому кубику знову сидів один жук?
4. Вологість грибів становить 99%. Скільки грибів можна одержати зі 100 кг, якщо після їх підсушування вологість знизилася до 98%?
5. Дано смужку розмірами 1 х 17, клітинки якої зліва на право пронумеровані послідовними натуральними числами від 1 до 17. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід дозволяється закреслити одну довільну клітинку в смужці, або деякі дві послідовні, серед яких перша має парний номер. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто з гравців може забезпечити собі виграш: той, хто ходить першим, чи його суперник? Вкажіть виграшну стратегію.

**Завдання 2-го етапу Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2013 р.**

**8 клас**

1. Чи існують натуральні числа *x*, і *y*, які задовольняють рівняння:?
2. Знайти найменше натуральне число, яке починається цифрою 7 і зменшується у 5 разів, якщо переставити його першу цифру в кінець числа.
3. Між містами А і В по гірській дорозі через перевал регулярно ходить автобус. При підйомі на перевал він їде зі швидкістю 25 км/год, а при спуску – 50 км/год, Час його руху від А до В – 3,5 години, а від В до А – 4 години. Знайдіть відстань між А і B.
4. Куб пофарбували зі всіх сторін і розпиляли на рівні кубики. Виявилося, що кубиків, у яких пофарбована рівно одна грань, стільки ж скільки не пофарбованих кубиків. На скільки маленьких кубиків розпиляли куб?
5. Дано смужку розмірами 1 х 17, клітинки якої зліва на право пронумеровані послідовними натуральними числами від 1 до 17. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці, або деякі дві послідовні, серед яких перша має парний номер. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто з гравців може забезпечити собі виграш: той, хто ходить першим, чи його суперник? Вкажіть виграшну стратегію.

**Завдання 2-го етапу Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2013 р.**

**9 клас**

1. Доведіть нерівність: .



1. Знайдіть суму гострих кутів при вершинах правильної семикутної зірки (дивись малюнок). Чому дорівнює сума гострих кутів при вершинах правильної 2013-кутної зірки, яка побудована аналогічним способом?
2. Знайдіть усі натуральні значення , для яких одночасно числа  та  є точними квадратами цілих чисел.
3. В трикутнику ABC точка M належить стороні BC, а N – AC, відрізки AM і AN перетинаються в точці P. В якому відношенні точка P ділить відрізок BN, якщо .
4. На дошці записні числа 1, 2, 3, ..., 101. Андрійко може вибрати довільні два із записаних чисел  та записати замість них число . Після 100–ї такої операцій на дошці залишиться одне число. Яке найбільше число при цьому може залишитись?

**Завдання 2-го етапу Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2013 р.**

**10 клас**

1. В трикутнику ABC точка M належить стороні BC, а N – AC, відрізки AM і AN перетинаються в точці P. В якому відношенні точка P ділить відрізок BN, якщо .
2. Знайдіть всі пари цілих чисел *x* і *y*, які задовольняють систему нерівностей:



1. Доведіть, що число  є добутком двох послідовних натуральних чисел.
2. Нескінченно спадна геометрична прогресія має перший член , знаменник  і суму 3. Знайдіть усі можливі значення , якщо відомо, що  – натуральні числа.
3. Знайдіть всі функції *f(х)*, які задовольняють співвідношенню *f(x)+2=x,* при всіх *х0*.

**Завдання 2-го етапу Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2013р.**

**11 клас**

1. Розв’яжіть рівняння .
2. Нехай для додатних дійсних чисел  і  має місце рівність . Доведіть, що .



1. Великий куб розрізали на 27 маленьких кубиків. Через три вказані точки на ребрах великого куба провели січну площину (дивись малюнок). Скільки маленьких кубиків перетинає проведена площина?
2. Знайдіть на множині дійсних чисел всі функції *f(х)*, які задовольняють співвідношенню .
3. Три юнака: Петро, Павло і Андрій та їх дівчата Катерина, Олена та Ірина відправились за новорічними подарунками. Кожний з них купив стільки подарунків, скільки гривень заплатив за кожний подарунок. Петро купив на 23 подарунка більше, ніж Олена, а Павло – на 11 подарунків більше ніж Катерина. Відомо, що кожен юнак витратив на 63 гривні більше, ніж його дівчина. Визначити імена дівчат кожного з юнаків.

**2-й етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2013 р.**

Відповіді та вказівки.

**6 клас** 1.Відповідь.24. 64 рази відрізали по одному чурбаку і ще *88-64=24* чурбаків утворилися як залишки 24 колод.

2.Відповідь. 10. Сім разів зважуємо по два яблука, а останні три зважуємо по два у різних комбінаціях і їх спільну вагу знайдемо як половину суми трьох зважувань.

3.Відповідь. Одночасно пустити обидва годинники. Як тільки мине час на 5-хв годиннику, одразу його перевернути, потім знов його перевернути як тільки вийде час на 7-хв годиннику (5+2+2=9).

4.Відповідь***:*** 4 числа. Спочатку наведемо відповідний приклад. Серед чотирьох чисел  не можна вибрати шуканих трьох, у чому легко переконатись простим перебором.

Припустимо, що таких чисел можна обрати п’ять. Усього числа можуть мати три різні остачі при діленні на , це числа . Якщо там є такі три, які мають попарно різні остачі при діленні на , то їх сума кратна . Інакше, тоді якоїсь остачі повинно не бути. Тобто різних остач щонайбільше дві, але чисел п’ять, тому якась остача зустрічається принаймні у трьох різних чисел. Тоді вже їх сума кратна .

5.Відповідь. Намалюємо цю карту послідовно. Очевидно, що для першого кола це твердження справедливе. Тепер для кожного наступного кола будемо змінювати кольори країн в середині кола на протилежні, що дозволить побудувати шукане розфарбування.

**7 клас** 1.Відповідь. 82 або 93. *N=10x+y=xy+66*, або *y=(10x-66)/(x-1)*. Легко бачити, що *x* може набувати тільки значення 7, 8 або 9.

2.Відповідь. Це число складене.



3.Відповідь. Це неможливо. Розфарбуємо кубики у шаховому порядку у два кольори – білий і чорний. Оскільки кубиків всього непарна кількість, то жуки, які сидять в кубиках одного кольору повинні переповзти в кубики іншого кольору. Але число таких кубиків завідомо має іншу парність.

4.Відповідь. 50 кг. 100 \* 0,99 = 99(кг) води у 100 кг грибів; 100 – 99 =1 (кг) сухої маси у свіжих грибах; 100% - 98% = 2% (сухої маси) у підсушених грибах; 1 : 0,02 = 50 (кг) підсушених грибів.

5.Відповідь. Перемогу може забезпечити собі той, хто починає гру першим. Розіб’ємо клітинки з номерами від 2 до 17 на 4 набори по 4 послідовні клітинки. Перший гравець спочатку закреслює першу клітинку, а потім діє аналогічно другому гравцю: якщо другий закреслює клітинку з парним номером, то перший – іншу парну з цього ж набору клітинок; якщо другий закреслює клітинку з непарним номером, то перший – іншу непарну з цього ж набору; якщо другий закреслює дві клітинки, то перший – інші дві з цього ж набору. Так перший гравець завжди матиме можливість ходу.

**8 клас**1. Відповідь. Ні.  ділиться на 3, а ліва частина при ділення на 3 дає остачу 1.

2.Відповідь.714285. Нехай шукане число X= = 7\*+A, де A =; A – n-значне. Після перестановки першої цифри одержимо число Y = = A + 7 . За умовою 7\* + A=5(A+7), звідки 49A = 7( - 5), або 7А =  - 5. Оскільки число  - 5 повинно ділитись на 7, то найменше ціле додатне число n, яке задовольняє умову, дорівнює 5, і А = 14285 – найменше значення А. Тоді найменше значення Х = 714285, шукане число.

3.Відповідь. 125 км. Рейс автобуса туди і назад триває 7,5 годин, при цьому, так як в гору він йде в два рази повільніше, ніж під гору, то на всі підйоми автобус витрачає у два рази більше часу, ніж на спуски. Таким чином, на спуски він витрачає 2,5 години, а на підйоми – 5 годин. Отже, відстань від А до В дорівнює (25⋅5 + 50⋅2,5)/2=125 км.

4.Відповідь. 8 або 512. Нехай кожну сторону куба розпиляли на n частин. Тоді кубиками, у яких виявилась пофарбованою рівно одна грань, будуть ті і тільки ті кубики, які прилягають до граней вихідного куба, але не містять його ребер. Неважко зрозуміти, що таких кубиків у кожної грані (n-2)2, а всього кубиків, у яких пофарбована рівно одна сторона 6⋅(n-2)2. Нефарбованими залишаться ті кубики, які не мають «виходу» на поверхню вихідного куба, тобто всі кубики, крім шару товщиною в один маленький кубик. Таких кубиків (n-2)3. Точний розв’язок рівняння 6⋅(n-2)2=(n-2)3 приводить до двох відповідей n=2 або n=8. Відповідно, куб розпиляли на 8 або 512 кубиків.

5.Відповідь. той хто починає першим.(Див. Зад. №5 7 кл.)

**9 клас**

1.Відповідь. Розглянемо допоміжну нерівність: , або  Очевидно, що вираз *P* більше лівої частини вихідної нерівності.

2. Відповідь. 180°. Цей результат можна одержати різними способами. Навколо такої зірки можна накреслити коло і сума шуканих кутів буде дорівнювати половині суми градусної міри дуг цього кола, на які спираються ці кути, а ці дуги в сумі дадуть коло.

3. Відповідь..Припустимо, що  задовольняє умови задачі, тоді позначимо  та , де . Тоді маємо:.

Тоді можливі такі варіанти, оскільки : 

Звідси ми знаходимо, що  та . Перевіркою переконуємось, що це значення задовольняє умову.

4. Відповідь. (660/169). Треба двічі застосувати теорему Фалеса.

5. Відповідь. .Оскільки  та , то при кожній операції найбільше число не може збільшитись. Тому якщо вдасться залишити число 101 – це буде шукана відповідь. А цього досягти можна таким чином: розіб’ємо числа на такі пари: , , ...,  (число 101 залишаємо без пари). Для кожної пари проводимо описану операцію і одержимо для кожної число , і таких чисел буде 50. Далі їх просто розбиваємо на 25 пар типу . Для кожної такої пари операція дає число . Таким чином на дошці залишиться записаними  та 25 нулів. Звідси очевидно, що останнім залишиться число .

**10 клас**

1. Відповідь. (660/169). Треба двічі застосувати теорему Фалеса.

2. Відповідь. Перша нерівність зводиться до вигляду: . Ця нерівність в цілих числах виконується тільки в трьох випадках:  Розв’язавши ці системи і виконавши перевірку для другої нерівності вихідної системи одержимо два розв’язки: *(-6; 6), (-7; 7)*.

3. Відповідь. Нехай , тоді  і  =  = 

4. Відповідь.. Відомо, що . Таким чином  або . Оскільки  – натуральне, то  або . Тоді у першому випадку , що неможливо для натурального . У другому випадку . Що дає єдиний можливий розв’язок.

5. Відповідь. Введемо заміну **, тоді *+2 f(t)= .* Одержимо систему рівнянь: **, з якої . Замінимо змінну t на x, отримаємо шукану функцію . Виконавши перевірку, робимо висновок, що знайдена функція є розв’язком даного функціонального рівняння.

**11 клас**

1. Відповідь.. Областю допустимих значень рівняння є відрізок . Запишемо рівняння у вигляді . Розкладаючи ліву частину рівняння на множники, одержимо: . Залишається розв’язати стандартними методами рівняння , .

2. Відповідь. Задана рівність рівносильна таким співвідношенням: , , , , , . Для  та  



3. Відповідь. 13. Треба виконати і обґрунтувати відповідну побудову перерізу куба.

4. Відповідь. Зафіксуємо змінну x, тоді функціональне рівняння стане лінійним рівнянням з двома невідомими. Введемо заміну ** , тоді . Отримаємо систему рівнянь: . Знаходимо функцію: . Отже, виконавши перевірку, робимо висновок, що функція  є розв’язком даного функціонально рівняння.

5. Відповідь.Олена дівчина Павла, Катерина дівчина Андрія, Ірина дівчина Петра. Нехай один з юнаків купив х подарунків, а його дівчина у подарунків; тоді вони заплатили відповідно х2 гривень і у2 гривень. За умовою х2 – у2 = 63, (х – у)(х + у) = 3⋅3⋅7. Отримаємо три системи:

1. х + у = 9, х + у = 21, х + у = 63,
2. х – у = 7, х – у = 3, х – у = 1, і три пари розв’язків
3. х = 8 х = 12 х = 32
4. у = 1 у = 9 у = 31

Оскільки Петро купив на 23 подарунка більше від Олени то Петро купив 32, а Олена 9 подарунків. Оскільки Павло купив на 11 подарунків більше від Катерини, то Павло купив 12, а Катерина 1 подарунок. Звідси: Олена дівчина Павла, Катерина дівчина Андрія, Ірина дівчина Петра.