

**Завдання та розв'язання завдань олімпіади для абітурієнтів
Фізико-математичного інституту Національного педагогічного
університету імені М.П. Драгоманова**

13 квітня 2013 року

1. Обчислити без калькулятора

$$\frac{0,3(31)}{41} - \frac{4}{495}.$$

Відповідь. 0.

Перетворимо періодичний дріб на звичайний:

$$0,3(31) = \frac{331-3}{990} = \frac{328}{990} = \frac{164}{495}.$$

Наступні обчислення:

$$\frac{164}{495} - \frac{4}{495} = \frac{164}{495 \cdot 41} - \frac{4}{495} = \frac{4}{495} - \frac{4}{495} = 0$$

2. Порівняйте числа $\log_{2013} 2012$ і $\log_{2012} 2013$.

Відповідь. $\log_{2013} 2012 < \log_{2012} 2013$.

Оскільки $\log_{2013} 2012 < \log_{2013} 2013 = 1$, а $\log_{2012} 2013 > \log_{2012} 2012 = 1$.

3. Двоє веселих мурашок заповзли у старовинний настінний годинник, який *іде правильно*, і вирішили трохи покататися на його стрілках. Довжина годинникової стрілки цього годинника дорівнює 5 см, а довжина хвилинної — 7 см. Умістившись на самих кінчиках різних стрілок, мурашки почали катання о 23⁰⁰. Скільки хвилин пройшло до того моменту часу, коли відстань по прямій між комахами *вперше* стала 12 см?

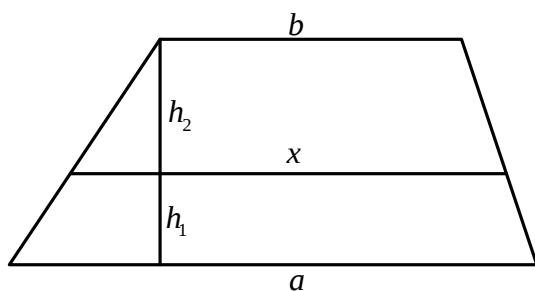
Відповідь. $27\frac{3}{11}$ хв.

Оскільки $5 + 7 = 12$, то кут між стрілками має дорівнювати 180° . О 23⁰⁰ кут між стрілками дорівнював 30° . Він має збільшитися на 150° . За 1 хв хвилинна стрілка повертається на $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$, а годинникова — на $\frac{360^\circ}{12 \cdot 60} = 0,5^\circ$. Тому за 1 хв кут між годинниковою і хвилинною збільшується на $6^\circ - 0,5^\circ = 5,5^\circ$. Тоді, щоб кут між ними збільшився на 150° має пройти $\frac{150}{5,5} = 27\frac{3}{11}$ хв.

4. Основи трапеції a і b . Знайти довжину відрізка, який паралельний до основ трапеції і ділить площу трапеції навпіл.

Відповідь. $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Виконаємо рисунок.



З умови задачі запишемо такі рівності:

$$\frac{a+x}{2} \cdot h_1 = \frac{b+x}{2} \cdot h_2,$$

$$(a+x) \cdot h_1 = \frac{a+b}{2} \cdot (h_1 + h_2).$$

З першої рівності: $\frac{h_2}{h_1} = \frac{a+x}{b+x}$. Поділимо обидві частини другої рівності на h_1 :

$$(a+x) = \frac{a+b}{2} \cdot \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right).$$

Підставимо значення $\frac{h_2}{h_1}$ в останню рівність:

$$(a+x) = \frac{a+b}{2} \cdot \left(1 + \frac{a+x}{b+x}\right),$$

$$2(a+x)(b+x) = (a+b)(b+a+2x),$$

$$2ab + 2(a+b)x + 2x^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)x,$$

$$2x^2 = (a+b)^2 - 2ab,$$

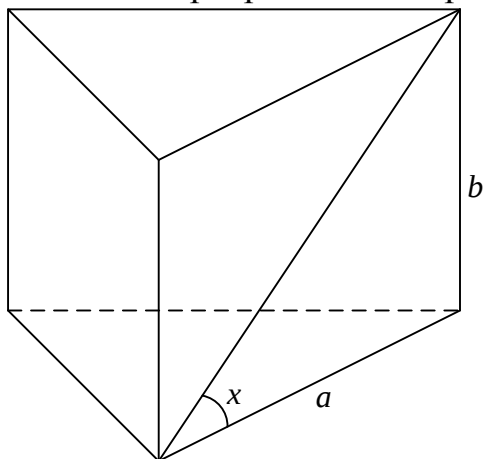
$$2x^2 = a^2 + b^2,$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

5. У правильній трикутній призмі сума ребер, що виходять з однієї вершини, дорівнює 4. При якій величині кута між діагоналлю бічної грані призми та площиною її основи площа бічної поверхні призми буде найбільшою?

Відповідь. $\arctg 2$.

Позначимо ребра основи через a , бічне ребро — b .



Площа бічної поверхні $S = 3ab$. За умовою $2a + b = 4$. Звідси $b = 4 - 2a$. Тоді $S = 3a(4 - 2a) = -6a^2 + 12a$.

Площа бічної поверхні задається квадратичною функцією. Її графіком є парабола, вітки якої напрямлені донизу. Найбільшого значення ця функція набуває у вершині параболи, коли $a = \frac{-12}{2 \cdot (-6)} = 1$. Тоді $b = 2$.

(Можна скористатися похідною: $S' = -12a + 12$.

$S' = 0$, $a = 1$. Якщо $a < 1$, то $S' > 0$ і функція зростає; якщо $a > 1$, то $S' < 0$ і функція спадає. Отже, $a = 1$ є точкою максимуму.)

Оскільки $\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}$, то $\operatorname{tg} x = \frac{2}{1} = 2$.

Шуканий кут $x = \operatorname{arctg} 2$.

6. Розв'яжіть рівняння $25x^2 - 20x + 6 = \left(\sqrt{2} - \cos \frac{5\pi x}{4} \right) \left(\sqrt{2} + \cos \frac{5\pi x}{4} \right)$.

Відповідь. $\frac{2}{5}$.

Виконаємо перетворення:

$$25x^2 - 20x + 6 = 2 - \cos^2 \frac{5\pi x}{4},$$

$$25x^2 - 20x + 4 = -\cos^2 \frac{5\pi x}{4},$$

$$(5x - 2)^2 = -\cos^2 \frac{5\pi x}{4}.$$

Рівність можлива лише за умови

$$\begin{cases} (5x - 2)^2 = 0, \\ -\cos^2 \frac{5\pi x}{4} = 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 5x - 2 = 0, \\ \cos \frac{5\pi x}{4} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що розв'язок першого рівняння системи $x = \frac{2}{5}$ задовольняє й друге рівняння.

7. Знайдіть усі значення параметра c , при якому система рівнянь

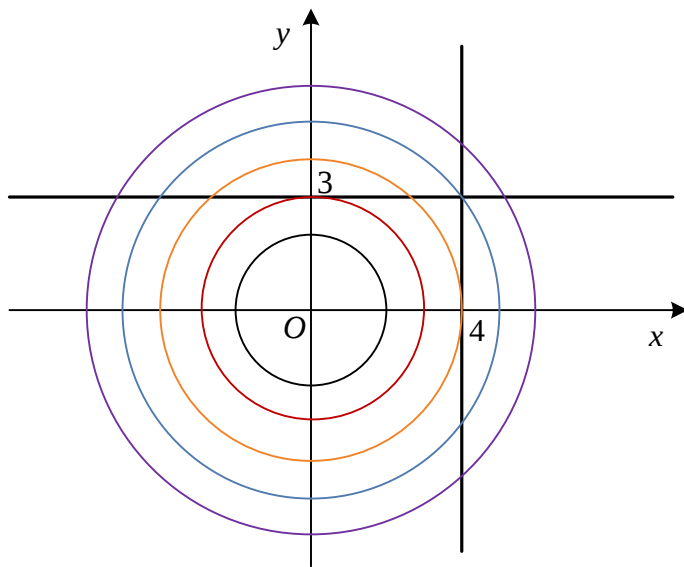
$$\begin{cases} (x - 4)(y - 3) = 0, \\ x^2 + y^2 = c \end{cases}$$

має лише три розв'язки.

Відповідь. 16; 25.

Зобразимо в системі координат xOy геометричні місця точок, які задані рівняннями системи.

Рівняння $(x - 4)(y - 3) = 0$ задає пару прямих $x = 4$ та $y = 3$. Рівняння $x^2 + y^2 = c$ задає концентричні кола з центром у початку координат і радіусом $\sqrt{c}$.



Очевидно, що система матиме рівно три розв'язки, коли коло дотикатиметься прямої $x = 4$ або проходитиме через точку перетину прямих $x = 4$ і $y = 3$. У першому випадку $c = 16$, у другому $c = 25$.