



А. В. Лисюк



$e^{i\pi} + 1 = 0$

Орієнтаційні завдання

$e^{iu} = \cos(u) + i \sin(u)$

з математики

5-8 клас

$7+1=8$

$7 \times 8 = 56$

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 75 \\ \hline 5625 \end{array}$$

$5 \times 5 = 25$

Районний методичний кабінет відділу освіти Сквирської РДА

Сквирська ЗОШ I-III ст. №3 ім. П.Тисьменецького

Упорядник: А. В. Лисюк. Олімпіадні завдання з математики 5-8 класи:
методичний збірник. – Сквиря: «Джерело», 2015. – 74 с.

Комп'ютерний набір: А.В.Лисюк

Методичний збірник містить олімпіадні задачі для 5-8 класів, їх розв'язання, вказівки та відповіді. Матеріал посібника допоможе провести шкільну олімпіаду та підготувати учнів до II та III етапів Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.

Для учнів та вчителів математики загальноосвітніх навчальних закладів.

Зміст

1. Передмова.....	4
2. Задачі олімпіадного змісту	
2.1 5 клас.....	5
2.2 6 клас.....	7
2.3 7 клас.....	13
2.4 8 клас.....	19
3. Розв'язання, вказівки, відповіді	
3.1 5 клас.....	24
3.2 6 клас.....	27
3.3 7 клас.....	33
3.4 8 клас.....	40
4. Орієнтовні варіанти завдань для шкільної олімпіади	
4.1 Варіант 1.....	50
4.2 Варіант 2.....	60
5. Орієнтовні критерії оцінювання	70
6. Поради учаснику олімпіади.....	71
7. Використані джерел.....	72



Передмова

Одним із напрямків роботи з розвитку інтелектуальної обдарованості учнів є олімпіади. Ціль математичної олімпіади – виявити учнів, здатних нестандартно (і при цьому правильно) думати і застосовувати набуті в школі знання до розв’язування “нешкільних” задач.

Олімпіадна задача з математики – це задача підвищеної складності, нестандартна як за формулюванням, так і за методами розв’язання. Серед олімпіадних задач зустрічаються такі, для розв’язання яких потрібні незвичні ідеї та спеціальні методи, так і задачі більш стандартні, але деякі із них можна розв’язувати оригінальними способами.

Розпочинати роботу по підготовці учасника математичної олімпіади необхідно з самого маленького віку. Коли учні приходять в школу, то з початкових класів слід готувати майбутнього переможця. Задачі на розрізання, склеювання, заміщення, розрізання, ігрові задачі, задачі на складання таблиць істинності, все це під силу самим маленьким учням. Продовжити роботу повинен учитель середніх та старших класів.

Саме з метою допомогти вчителю середніх класів і створена дана робота.

В роботі представлені задачі для підготовки до олімпіади з математики та орієнтовні варіанти олімпіадних завдань для шкільної олімпіади.

Дана збірка може бути використана вчителями математики, керівниками гуртків, учнями середніх класів загальноосвітніх навчальних закладів при підготовці до олімпіад різних етапів.

Задачі олімпіадного змісту



5 клас

1. Для приготування напою потрібно змішати 4л. яблучного соку, 2 л. виноградного соку і 1 л. цукрового сиропу. Скільки літрів яблучного соку потрібно для приготування 350 літрів такого напою.

2. На одній шальці терезів лежать 6 однакових пачок чаю та гиря масою 50 г, а на другій – одна така сама пачка чаю та гирі масою 100 г і 200 г. Терези знаходяться в рівновазі. Скільки грамів важить одна пачка чаю?

3. У лютому деякого року 2419200 секунд. Чи високосним був цей рік? (У високосному році 366 днів, в інших - 365 днів).

4. Відновити пропущені цифри.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 * & 1 & * & \\
 3 & * & 2 & \\
 \hline
 + & * & 3 & * \\
 3 & * & 2 & * \\
 * & 2 & * & 5 \\
 \hline
 1 & * & 8 & * & 3 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

5. Відновити ребус ВОДА + ВОДА = ЗАВОД (однаковим літерам відповідають однакові цифри, різним літерам - різні цифри).

6. Дівчинка запитала в дідуся, скільки йому років. Той відповів: «Якщо зменшити мої роки в 6 раз та відняти ще 6 років, то отримаємо 6. То скільки мені років?».

7. Для нумерації сторінок підручника потрібно 411 цифр. Скільки сторінок у підручнику?

8. Сума 2010 натуральних чисел - непарне число. Яким числом - парним або непарним - є добуток цих чисел?

9. У числі 7 ***** 1 замініть зірочки цифрами так, щоб сума будь-яких трьох сусідніх цифр дорівнювала 11. Знайдіть всі розв'язання і доведіть, що інших немає.

10. Шість однакових діжок вміщують 28 відер води. Скільки відер води можуть вмістити таких 15 діжок?

11 . Як можна відміряти 9 хвилин за допомогою пісочних годинників на 5 хвилин та на 7 хвилин?

12. Скількома способами можна поділити 50 грн між Петриком та Павликом так, щоб кожен хоча б один з них отримав парну кількість гривень?

13. Чи можна розміняти 25 карбованців за допомогою десяти купюр вартістю 1, 3 та 5 карбованців?

14. У саду росли яблуні і вишні. Половина всіх вишень і чверть усіх яблунь становили однакову кількість дерев, а всього в саду було 360 дерев. Скільки яблунь і скільки вишень росте в саду?

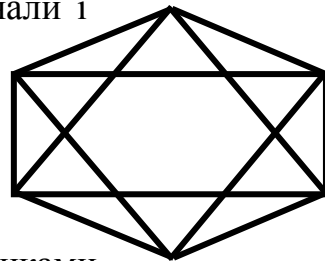
15. Маса 10 слив така сама, як і маса 3 яблук та 1 груші. Маса 2 слив і 1 яблука така сама, як маса 1 груші. Скільки слив треба, щоб їх маса дорівнювала масі 1 груші?

16. Розмовляють троє друзів на прізвища: Білокуров, Чорний та Рудий. Брюнет сказав Білокурову: «Цікаво, що один з нас блондин, другий – брюнет, а третій – рудий, але ні в одного колір волосся не відповідає прізвищу». Який колір волосся мають кожен з друзів? Відповідь поясніть.

17. Приїхало 100 туристів. З них 20 не знали ні німецької ні французької, 78 знали французьку і 65 – німецьку. Скільки туристів знали і німецьку і французьку?

18. Скільки трикутників зображено на малюнку?

19. Дев'ять автобусних зупинок розташовані на прямій вулиці так, що відстані між будь-якими сусідніми зупинками



однакові. Між першою і третьою зупинкою відстань 600 м. Яка відстань між першою і останньою зупинкою?

20. Петрик купив декілька яблук і приніс їх додому. Сестра запитала його: «Скільки ти заплатив за ці яблука?». Петрик відповів: «Здогадайся! Я купив у 4 рази більше яблук, ніж ти учора, але заплатив за кожне яблуко в 3 рази менше». Скільки грошей витратив Петрик, якщо його сестра витратила 6 гривень? Відповідь обґрунтуйте.

21. Запишіть число 2010 за допомогою 11 трійок і арифметичних дій.

22. Двоє гравців по черзі дістають з скриньки кульки. Програє той, хто забирає останню кульку. Хто може забезпечити собі перемогу, перший, чи другий, якщо спочатку в скриньці було 2002 кульки і за один хід можна виймати не менше однієї і не більше п'яти кульок?

23. Лікар повинен оглянути трьох хворих з різними інфекційними хворобами. Чи можливо це зробити і як саме, якщо він має лише дві пари гумових рукавичок?

24. Квиток до музею коштує 5 грн. для дітей і 10 грн. для дорослих. У неділю музей відвідали 50 чоловік, які заплатили 350 грн. Скільки дорослих було серед відвідувачів?

25. Коли батькові був 31 рік, то сину було 8 років, а тепер батько старший від сина в два рази. Скільки зараз сину років?



6 клас

1. Сестра дала одному своєму брату половину всіх груш, що були у неї, і ще 5 груш, а другому – половину решти і останні 5 груш. Скільки груш було у сестри?

2. Чи можна подати число 91 у вигляді суми кількох натуральних чисел, добуток яких також дорівнює 91?

3. Поставте замість зірочок в вираз $*+**+***+****=3330$ десять різних цифр, щоб отримати правильну рівність.
4. Комерсант Вася зайнявся торгівлею. Кожного ранку він купує товар на деяку частину грошей, які він має (можливо на всі гроші). Після обіду він продає куплений товар в два рази дорожче, ніж купляв. Як потрібно Васі торгувати, щоб через 5 днів у нього було рівно 25000 рублів, якщо спочатку він мав 1000 рублів.
5. Їдучи по лісовій дорозі, Іван-царевич зустрів ведмедя, вовка та лисицю. Ведмідь завжди говорить правду, лисиця завжди бреше, а вовк по черзі каже правду і бреше, завжди починаючи з правди. Звірі сказали Івану-царевичу по 2 речення. 1-й: «Ти коня врятуєш». «Але сам загинеш». 2-й: «Ти цілий неушкодженим залишишся». «І коня врятуєш». 3-й: «Ти цілий залишишся». «Але коня не врятуєш». Визначте, якому із звірів належить кожна відповідь і що чекає Івана царевича попереду.
6. Розріжте квадрат 3×3 на дві частини і квадрат 4×4 на дві частини так, щоб з утворених чотирьох частин можна було скласти квадрат.
7. В таблицю 2×5 записали всі натуральні числа від 1 до 10. Після цього підраховали кожен з сум чисел в рядку і в стовпчику (всього вийшло 7 сум). Яка найбільша кількість цих сум може виявитися простими числами.
8. Вася склав куб з 27 кубиків, а потім пофарбував його поверхню в синій колір. Потім Петро забрав всі кубики, у яких були пофарбовані хоча б дві грані. Скільки кубиків взяв собі Петро?
9. Петро і Вася розрізали два однакових прямокутника. У Петра вийшло два прямокутники з периметром 40 см кожен, а у Васі - два прямокутники з периметром 50 см кожен. Який периметр мали початкові прямокутники?
10. На прямій відмітили кілька точок. Після цього між кожними двома сусідніми точками поставили ще по точці. Таку операцію виконали кілька разів (може бути один раз). В результаті на прямій виявилось 65 точок. Скільки точок могло бути на прямій спочатку?

- 11.** На острові, населення якого становлять тільки лицарі, що говорять правду, і брехуни, які завжди брешуть, знаходиться науково-дослідний інститут (НДІ). Кожний із його співробітників зробив одного разу дві заяви: а) в інституті немає і десятка людей, що працюють більше від мене; б) принаймні сто осіб в інституті отримують зарплату більшу, ніж моя. Відомо, що навантаження у всіх працівників різне, як і зарплата. Скільки людей працює в НДІ?
- 12.** Сьогодні неділя. Марічка почала читати книжку, у якій 290 сторінок. Вона читає 4 сторінки щодня, крім неділі, коли вона прочитує 25 сторінок. Марічка читає кожного дня. За скільки днів вона прочитає книгу?
- 13.** Розшифруйте числовий ребус $AAAA - BBB + CC - D = 1234$ (однаковими буквами позначені однакові цифри, різними – різні).
- 14.** У запису n -значного числа маємо по одній цифри 1, 3, 5, 8, а всі інші цифри нулі. Чи може таке число бути точним квадратом?
- 15.** До числа 10 справа і зліва дописали по одній цифрі так, щоб дістати число, кратне 72. Знайдіть отримане число.
- 16.** У десятковому запису числа 300 одиниць, кілька нулів, а інших цифр немає. Чи може це число бути повним квадратом?
- 17.** Є сім зовні однакових монет, серед яких п'ять справжніх (усі однакової маси) і дві фальшиві (однакової маси, але легші за справжні). Як за допомогою двох зважувань на шалькових терезах без гир виділити три справжні монети?
- 18.** На дошці записують послідовність чисел 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28 і т. д. (кожне наступне число одержують із попереднього додаванням до нього його ж суми цифр). Чи буде записаним на дошці число 200120022003?
- 19.** Одинадцять учнів відвідують п'ять гуртків (учень не обов'язково відвідує всі гуртки). Доведіть, що серед них є два учні, А і В, такі, що всі гуртки, які відвідує А, відвідує й В.
- 20.** На дошці записані числа 0, 1, 0, 0. За один крок дозволяється додавати одиницю до будь-яких двох з них. Чи можна, повторюючи цю операцію багато разів, досягти того, щоб усі числа стали рівними?

21. В тирі Петрик купив 5 куль. За кожний успішний постріл йому давали ще 5 куль. Петрик стверджує, що зробив 50 пострілів і 8 разів влучив у ціль, а його друг Василь каже, що такого бути не може. Хто з них правий і чому?
22. У правій і лівій кишенях Олега разом 35 коп. Якщо з правої кишені він перекадає в ліву стільки копійок, скільки було в лівій, то в правій кишені залишиться на 3 коп. більше, ніж в лівій. Скільки грошей було в Олега в кожній кишені спочатку?
23. Чи можна подати число 91 у вигляді суми кількох натуральних чисел, добуток яких також дорівнює 91?
24. Комп'ютерний вірус кожного дня знищує певну частину інформації на жорсткому диску. Протягом першого дня вірус знищив половину всієї інформації, протягом другого - $\frac{1}{3}$ того, що залишилося. Протягом третього дня вірус знищив $\frac{1}{4}$ того, що залишилося, на четвертий день - $\frac{1}{5}$ решти. Яка частина початкового об'єму інформації залишилася?
25. Двоє гравців по черзі дістають з скриньки кульки. Програє той, хто забирає останню кульку. Хто може забезпечити собі перемогу, перший, чи другий, якщо спочатку в скриньці було 2002 кульки і за один хід можна виймати не менше однієї і не більше п'яти кульок?
26. Було 7 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 8 частин, потім деякі з одержаних частин розрізали ще на 8 частин і т.д. Чи може на деякому етапі загальна кількість кусків паперу дорівнювати 2002?
27. У Сергія однокласників на 7 більше, ніж однокласниць. У його класі хлопців вдвічі більше, ніж дівчат. Скільки однокласниць у Сергійкової однокласниці Катрусі?
28. У класі кількість відсутніх учнів складає $\frac{1}{6}$ від кількості присутніх. Коли з класу вийшов один учень, то кількість відсутніх стала $\frac{1}{5}$ від кількості присутніх. Скільки учнів навчається в класі?
29. В класі 33 учня, разом їм 430 років. Доведіть, що в класі знайдуться 20 учнів, яким разом не менше 260 років.

30. Із пунктів А і В одночасно назустріч друг другу, з постійними швидкостями, виїхали два велосипедисти, які зустрілися на відстані **70** км від А. В кінцевих пунктах вони відпочивали на протязі часу, після чого виїхали назад з тими ж самими швидкостями і зустрілися в 40 км від А. Знайдіть відстань від А до В.

31. Скільки колод розпиляли на дрова, якщо всього зробили 64 розпили і одержали 88 чурбаків?

32. Знайдіть значення дробу $\frac{У \cdot К \cdot Р \cdot А \cdot \ddot{І} \cdot Н \cdot А}{Є \cdot В \cdot Р \cdot О \cdot П \cdot А}$, де різні букви – це різні цифри, між буквами стоїть знак множення.

33. Вчитель написав на листку паперу число 20. Тридцять три учні передають листок один одному, і кожен за бажанням додає або віднімає від числа одиницю. Чи може в результаті одержатись число 10?

34. Голодні Вінні-Пух і П'ятачок з'їли мед із горщика і стали ситими. Відомо, що мед із горщика легший від голодного П'ятачка, а ситий Вінні-Пух важить стільки ж, скільки два голодних П'ятачка. Хто важить більше: голодний Вінні-Пух чи ситий П'ятачок? Не забудьте обґрунтувати свою відповідь.

35. В школі, де вчиться більше 225, але менше 245 учнів, частина учнів є відмінниками, а інші хорошистами. Після складної контрольної роботи $\frac{2}{7}$ відмінників стали хорошистами, а хорошити так і залишились хорошистами за винятком одного чоловіка, який став трієчником. При цьому хорошистів і відмінників стало порівну. Скільки учнів могло бути в школі? Наведіть усі можливі варіанти відповіді.

36. Андрійко і Петрик їдуть у сусідніх вагонах потягу «Київ – Івано-Франківськ». Вагон, в якому їде Андрійко, – п'ятий з «голови» потягу, а вагон, в якому їде Петрик, – сьомий з «хвоста». Скільки вагонів у цьому потязі? Відповідь обґрунтуйте.

37. Мандрівник повинен подолати пустелю. Його шлях дорівнює 80км. За один день він долає 20км та може нести запас їжі та води на 3 дні, тому він

повинен робити проміжні бази, щоб поповнювати в них запаси. За скільки днів він може подолати пустелю?

38. Деяке двоцифрове число зменшили на 7, потім одержаний результат зменшили в 10 разів і одержали число, яке на 34 менше початкового. Яким було початкове число? Відповідь обґрунтуйте.

39. Вздовж паркану ростуть 8 кущів малини. Число ягід на сусідніх кущах відрізняється на 1. Чи може на всіх кущах разом бути 225 ягід?

40. На дошці в ряд виписали сто сімок. Чи можна між деякими з них поставити знаки "+" чи "-" так, щоб значення одержаного виразу дорівнювало 1999?

41. 96 дітей у літньому таборі мають поділитися на декілька груп з однаковою кількістю дітей у кожній. Скількома різними способами (способи вважаються різними, якщо вони відрізняються кількістю дітей у групах) вони можуть це зробити, якщо кожна група повинна містити більше ніж 5 дітей, але менше, ніж 20? Відповідь пояснити.

42. Одного разу вчителька, увійшовши до класу, побачила, що деякі учні принесли до школи своїх чотириногих вихованців. У класі було багато таких істот: собаки, кішки, черепахи і навіть козеня. Вчителька нарахувала 30 голів і 76 ніг. Скільки в класі було учнів і тварин?

43. Кожен із чотирьох гномів – Беня, Веня, Євген і Сеня або завжди говорять правду, або завжди брешуть. Ми почули таку розмову:

Беня каже Вені: «Ти брехун!»

Євген каже Бені: «Сам ти брехун!»

Сеня каже Євгену: «Вони обидва брехуни, та й ти теж!»

Хто з них говорить правду?

44. Дев'ять автобусних зупинок розташовані на прямій вулиці так, що відстані між будь-якими сусідніми зупинками однакові. Між першою і третьою зупинкою відстань 600 м. Яка відстань між першою і останньою зупинкою?

45. Петрик купив декілька яблук і приніс їх додому. Сестра запитала його: «Скільки ти заплатив за ці яблука?». Петрик відповів: «Здогадайся! Я купив у 4

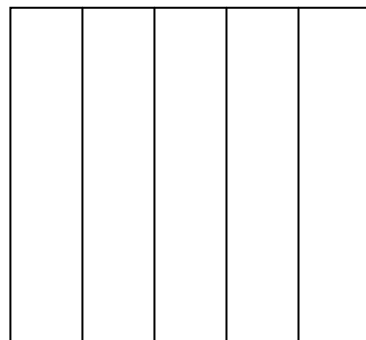
рази більше яблук, ніж ти учора, але заплатив за кожне яблуко в 3 рази менше». Скільки грошей витратив Петрик, якщо його сестра витратила 6 гривень? Відповідь обґрунтуйте.

46. Василько протягом доби витрачає $\frac{1}{3}$ частину свого часу на сон, $\frac{1}{4}$ - на навчання в школі, $\frac{1}{5}$ - на зустріч з друзями, $\frac{1}{6}$ - він слухає музику, $\frac{1}{7}$ - грає на комп'ютері. Чи можна так жити, якщо кожною справою він займається окремо протягом одного дня?

47. Дріб $\frac{B * A * P * E * H * H * Я}{K * A * P * Л * С * О * Н}$ дорівнює цілому числу. Різні букви відповідають різним цифрам, а між ними стоїть знак множення. Чому дорівнює цей дріб? Обґрунтуйте відповідь.

48. Є трицифрове число, всі цифри якого різні. Сума всіх трьох цифр десять. Добуток перших двох цифр шість. Цифра десятків найбільша серед цифр числа. Знайти це трицифрове число.

49. Дідусь Михайло розділив квадрат на п'ять однакових прямокутників так, як показано на малюнку. Знайдіть периметр квадрата, якщо периметр кожного з п'яти однакових прямокутників 150 м.



50. Школяр прочитав книжку за три дні. Першого дня він прочитав 0,2 усієї книжки і ще 16 сторінок, другого дня – 0,3 решти книги і ще 20 сторінок. А за третій день – 0,75 залишку і останні 30 сторінок книжки. Скільки сторінок в книжці?



7 клас

1. Відновіть ребус КОКА+ КОЛА = ВОДА (однаковим буквам відповідають однакові цифри, різним буквам - різні цифри).

2. Вася задумав три різні ненульові цифри. Петро записав всі дев'ять можливих двозначних чисел, у десятковому записі яких використовувалися тільки ці цифри. Сума записаних чисел дорівнює 231. Знайдіть цифри, задумані Василем.

3. Знайдіть найменше складене число, яке не ділиться на жодне із натуральних чисел від 2 до 10.

4. Швидкість бігуна А в 3 рази більше швидкості бігуна Б, а один кілометр він пробігає на 10 хвилин швидше. Скільки кілометрів кожен з них пробігає за годину?

5. Боря і Ваня грають в наступну гру. За один хід можна помножити записане на дошці число на будь-яке натуральне число від 2 до 9, записати отримане число на дошці, а старе число стерти. Ходи робляться по черзі. Виграє той, хто першим отримає число, більше 1000. Першим ходить Боря. Хто виграє при правильній грі?

6. Розв'яжіть рівняння $\|4|x| - 3| - 2| = 3$.

7. На моїй вулиці є 17 будинків. Я живу у будинку під номером 12, який є останнім на стороні вулиці з парними номерами будинків. Мій приятель живе в останньому будинку на стороні вулиці з непарними номерами будинків. Який номер його будинку?

8. У лісосмузі ростуть 18 дубів. На всіх них порівну жолудів. Подув вітер, і з деяких дубів посипалися жолуді: з деяких – рівно половина, з деяких – рівно третина, а з решти – жодного жолудя. При цьому з усіх дубів разом упала рівно $\frac{1}{9}$ частина всіх жолудів. Із скількох дубів жолуді не падали?

9. Знайдіть двозначне число, яке на 66 більше добутку його цифр.

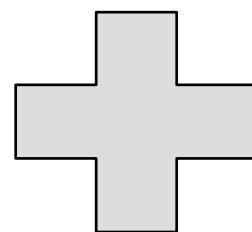
10. Перевірте, чи є число $20142013^4 + 4$ простим.

11. Куб розрізали на $2013 \times 2013 \times 2013$ маленьких кубиків. Спочатку в кожному маленькому кубу сидів жук. Потім кожний жук переповз у сусідній кубик (сусідніми вважаються кубики, які мають спільну грань). Чи можливо, щоб після цього в кожному маленькому кубу знову сидів один жук?

12. Вологість грибів становить 99%. Скільки грибів можна одержати зі 100 кг, якщо після їх підсушування вологість знизилася до 98%?
13. Петрик вибрав три різні цифри a, b і c ($a \neq b, b \neq c, c \neq a$) і записав усі можливі різні тризначні натуральні числа, десятковий запис кожного з котрих містить усі три вибрані цифри, але не може починатися з нуля. З'ясувалося, що сума всіх записаних чисел дорівнює 3376. Визначте, які саме цифри були вибрані, і доведіть, що інших варіантів немає.
14. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ ділиться націло на 10.
15. Олег задумав натуральне число, помножив його на 13, викреслив останню цифру результату, одержане число помножив на 7, знову викреслив останню цифру результату і одержав число 21. Яке число задумав Олег?
16. В авіаційному гуртку, де займаються Іванка та Даринка, не менше 91% - хлопці. Чи може бути в цьому гуртку менше ніж 21 хлопець?
17. Братові й сестрі зараз разом 63 роки. Зараз сестрі вдвічі більше років, ніж було братові тоді, коли сестрі було стільки років, скільки братові зараз. Скільки років сестрі й скільки братові?
18. На чудо-дереві ростуть 25 бананів і 30 апельсинів. Кожного дня Чудо-юдо зриває два плоди. Замість цих двох зірваних фруктів виростає: один апельсин, якщо було зірвано два однакові фрукти; банан, якщо зірвали два різні фрукти. Яким буде той фрукт, що залишиться на цьому дереві останнім?
19. Знайдіть всі трицифрові числа, які в результаті викреслювання середньої цифри зменшуються в 7 разів.
20. Розв'язати рівняння $|x| = \frac{x}{2} + 2010$.
21. Є 242 монети, серед яких одна фальшива і легша за інші, а усі інші – справжні. За скільки зважувань на терезах без важків з двома чашами можна визначити фальшиву монету?

22. Вовк запросив до себе в гості трьох поросят і Червону Шапочку дивитися мультики. Після перегляду Вовк перерахував кекси на кухні і заявив, що двох не вистачає. Як Вовку за два зважування визначити, хто з'їв кекси? Всі кекси важать однаково, всі поросята (принаймні, коли вони тільки прийшли в гості) - теж. Також відомо, що Червона Шапочка на дієті, тому могла з'їсти не більше 1 кексу.
23. Обчислити: $2^{2003} - 2^{2002} - 2^{2001} - \dots - 2^2 - 2 - 1$.
24. Скільки існує трицифрових чисел виду ABC ($a \neq 0$), таких, що $a + 3b + c$ ділиться на 3?
25. В клітинах таблиці 3×3 розставлені числа -1, 0, 1. Доведіть, що якісь дві із 8 сум по всім рядкам, всім стовпчикам і по двом головним діагоналям будуть рівні.
26. Скільки води треба випарити з 500 кг целюлозної маси, яка містить 85% води, щоб одержати масу з 75% вмістом води?
27. Скільки води потрібно долити до 25г 90-відсоткової кислоти, щоб одержати 75-відсоткову кислоту?
28. Який кут утворює між собою годинна і хвилинна стрілка годинника о 5 год. 48 хв.?
29. У середині тупого кута AOB провели три промені OC , OD і OE , причому OC перпендикулярна OA , OD - бісектриса кута AOB , OE - бісектриса кута BOC . Знайти міру кута DOE .
30. В таксі їдуть п'ять пасажирів. Доведіть, що серед них знайдуться два пасажирів, що мають однакову кількість знайомих серед цих п'яти пасажирів.
31. Знайдіть найменше 4-значне натуральне число, яке при діленні на 2;3;5;7 і 11 дає в остачі 1.
32. Знайдіть всі прості числа x і y такі, що число $x^y + y^x$ - просте.
33. Сума номерів домів на одній стороні житлового кварталу дорівнює 247. Знайдіть номер будинку, сьомого від початку кварталу.

- 34.** Микола та Ярина разом зібрали не більше 70 грибів, з них 52% білих. Коли Ярина викинула три найменших гриба, то білі склали рівно половину всіх грибів. Скільки грибів зібрали Микола та Ярина?
- 35.** В вершинах кубика розташовані числа, сума яких дорівнює 2008. Чи можна розташувати ці числа так, щоб сума чисел у вершинах при кожній грані кубика була менше 1000?
- 36.** З пунктів А і В одночасно виїхали назустріч друг другу два велосипедиста і зустрілись в 70 км від А. В кінцевих пунктах вони відпочивали по годині і виїхали назад з тими ж швидкостями. Друга зустріч відбулася в 40 км від А. Знайдіть відстань від А до В.
- 37.** Як розрізати хрест, який утворюють п'ять рівних квадратів (грецький хрест) на п'ять (або чотири) частин так, щоб з цих частин можна було б скласти квадрат?
- 38.** Відомо, що з чотирьох однакових на вигляд кілець одне відрізняється від інших, але не відомо, на скільки. Як знайти його не більш як за два зважування на шалькових терезах без гир?
- 39.** Чи можна попарно з'єднати 19 телефонів так, щоб кожен з них був з'єднаний рівно з 13 іншими?
- 40.** Василь задумав чотиризначне число і написав остачі від ділення цього числа на 2, на 3, ... , на 101 (всього 100 остач). Чи можливо, щоб серед виписаних чисел виявилось не менше 20 сімок?
- 41.** Відомо, що в понеділок Настя добиралася на автомобілі на роботу більше однієї години. Також відомо, що протягом будь-якої години руху середня швидкість її автомобіля дорівнювала 80 км/год. Чи могла його середня швидкість протягом усього шляху дорівнювати 100 км/год?
- 42.** У Олесі є необмежена кількість цифр 3 та рівно одна цифра 4. Вона хоче утворити число, яке б ділилося на найбільшу можливу кількість чисел з множини: $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Яке найменше число може утворити Олеся?



43. Сторони трикутників ABC та ACD задовольняють такі умови: $AB = AD = 3\text{ см}$, $BC = 7\text{ см}$, $DC = 11\text{ см}$. Які значення може приймати довжина сторони AC , якщо вона дорівнює цілій кількості сантиметрів, є середньою у $\triangle ACD$ та найбільшою у $\triangle ABC$? Відповідь обґрунтуйте.
44. Запишіть число 2010 за допомогою 11 трійок і арифметичних дій.
45. Обчисліть значення виразу $(1-2)-(3-4)-\dots-(2009-2010)$.
46. Скількома нулями закінчується добуток всіх цілих чисел від 1 до 75 включно?
47. В одному селі живуть чотири чоловіки: Акація, Береза, Верба і Граб. Один із них – кравець, другий – водій, третій – тесля, четвертий – швець. Одного разу кравець прийшов до тесляра, щоб попросити його полагодити дах, але йому сказали, що він допомагає Вербі ремонтувати двері. Визнач професію кожного, якщо відомо, що
- а) Граб не тесляр, а Береза живе по сусідству з теслею;
 - б) Береза не вміє водити автомобіль, а Акація дружить з водієм;
 - в) Верба заніс ремонтувати свої чоботи і змушений йти, щоб принести їх до дому.
48. В записі $52*2*$ замінити зірочки цифрами так, щоб отримане число ділилося на 36. Вказати всі можливі розв'язки.
49. На скільки частин ділиться аркуш паперу п'ятьма прямими, що перетинаються? Розглянути всі випадки.
50. Дідусь з внуком пішли разом кататися на лижах. Бабуся знає, що на горизонтальній поверхні обидвоє їдуть із швидкістю 7 км/год, під гору дід 8 км/год, а внук - 20 км/год,; вгору дід - 6 км/год, а внук - 4 км/год. Обидвоє проїхали по одному і тому ж маршруту. Чи може бабуся визначити що більше протяжність спуску чи підйому на їх шляху, якщо першим повернувся: а) внук; б) дід?

8 клас



1. Доведіть, що добуток трьох послідовних натуральних чисел, складений з другим із них, є кубом другого числа.
2. Є лист паперу в клітинку і олівці 6 кольорів. Зафарбуйте найменше число клітин так, щоб для будь-яких двох кольорів знайшлося дві клітини цих кольорів, що граничать по стороні. Доведіть, що менше число клітин зафарбувати не можна.
3. На острові проживають 2010 мешканців, кожен з яких або лицар (завжди говорить правду), або брехун (завжди бреше). Одного разу всі жителі острова розбилися на пари, і кожен про свого напарника сказав одну із фраз: «він лицар» або «він брехун». Чи могло виявитися так, що тих і інших фраз було виголошено порівну?
4. Є числа 1, 2, 4, 6. Дозволяється вибрати будь-які два з наявних чисел і помножити їх на одне і те ж натуральне число. Чи можна за кілька таких операцій зробити всі числа рівними?
5. Клоун сказав, що кількість кошенят, що живуть у нього дорівнює $\frac{3}{4}$ їх кількості і ще $\frac{3}{4}$ кошеняти. Слова « $\frac{3}{4}$ кошеняти» викликали сміх. Проте клоун сказав правду. Скільки кошенят живе у клоуна?
6. В коробці 36 кольорових кульок. Відомо, що серед будь-яких шести з цих кульок знайдуться хоча б 2 кульки одного кольору. Доведіть, що в коробці знайдеться 8 кульок одного кольору.
7. Чи існують натуральні числа x , і y , які задовольняють рівняння: $x^3 - x = 3y^2 + 2014$?

8. Скільки чотирицифрових чисел, що містять цифру 3, можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, не повторюючи їх?
9. Остання цифра трицифрового числа дорівнює 2. Якщо переставити останню цифру на початок числа, то отримане число зменшиться на 36. Яка сума цифр цього числа?
10. Знайти всі тризначні натуральні числа, кожне з яких більше суми квадратів своїх цифр на 517.
11. Знайдіть усі натуральні значення n , при яких є цілим числом значення виразу $\frac{n^2 + 2n - 8}{n}$.
12. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{37}{21}x\right)^3 = p$, де p – середнє арифметичне чисел $A = \frac{158^2 + 158 \cdot 185 + 185^2}{158 + 185}$ і $B = \frac{158^2 - 158 \cdot 185 + 185^2}{185 - 158}$.
13. У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($AB=CD$, $BC < AD$) проведені висота BH та діагональ BD . З'ясувалося, що ця діагональ є бісектрисою кута CDA . Доведіть, що величина кута HBD дорівнює сумі величин кутів ABH і CBD .
14. Є 40 зовні однакових монет, серед яких 2 фальшиві, причому вони легші від справжніх і важать однаково. Як за допомогою двох зважувань на шалькових терезах без гир відібрати 20 справжніх монет?
15. Відомо, що ціле число n не кратне 3. Доведіть, що $n^2 + 8$ кратне 3.
16. Два брати, Олег і Тарас, хочуть провідати бабусю, що живе за 20 км. У них є велосипед, на якому може пересуватись лише один з братів. Олег ходить пішки зі швидкістю 5 км/год, а швидкість їзди на велосипеді 20 км/год, швидкість Тараса 4 км/год і 15 км/год відповідно. Велосипед можна залишити на дорозі без догляду. За який найменший час хлопці зможуть дістатися до бабусі?
17. Одна з основ рівнобічної трапеції вдвічі більша за іншу, а бічна сторона дорівнює меншій основі. Знайдіть кути трапеції.

18. Доведіть тотожність $\frac{(a+b)}{a+(a-b)} = \frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}$.

19. Ціна квитка на стадіон була 200 грн. Після зниження цін на квитки, кількість глядачів на стадіоні збільшилася на 50%, а виручка з проданих квитків збільшилася на 14%. Скільки став коштувати квиток на стадіон після зниження ціни?

20. Про деяке двозначне число зроблені наступні твердження. «Це число або закінчується на 5, або ділиться на 7». «Це число або більше 20, або закінчується на 9». «Це число або ділиться на 12, або менше 21». Знайдіть всі двозначні числа, які задовольняють умовам задачі.

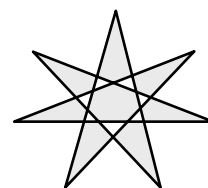
21. Чи існують цілі числа x і y , які задовольняють рівнянню $x^2 + 2002 = y^2$?

22. Чи може сума цифр натурального числа, яке є точним квадратом, дорівнювати 2003?

23. На папері в рядок написані декілька мінусів. Двоє гравців по черзі виправляють один, чи два сусідніх мінуса на плюси. Виграє той, хто виправить останній мінус. Хто виграє в цій грі і як йому треба діяти, якщо спочатку були написані 2002 мінуси?

24. Чи можна в таблицю розміром 5×5 записати числа $1, 2, \dots, 25$ так, щоб у кожному рядку сума деяких із записаних у ньому чисел дорівнювала сумі решти чисел цього рядка?

25. Чи існують цілі числа, які задовольняють рівнянню $x^3 - x = 3y^2 + 1$?



26. Десять учнів на олімпіаді розв'язали 35 задач, причому відомо, що серед них є учні, які розв'язали 1 задачу, які розв'язали 2 задачі і які розв'язали 3 задачі. Довести, що серед них є учень, який розв'язав не менше п'яти задач.

27. Обчисліть значення виразу $a^2 + b^2 + c^2$, якщо $a + b + c = 7$ і $ab + bc + ac = -5$

28. Знайдіть суму гострих кутів при вершинах правильної семикутної зірки (дивись малюнок).

29. Точки K і L - середини основ AB і CD трапеції ABCD відповідно. Виявилося, що $AB=2CD$, а точка K лежить на бісектрисі кута C, Доведіть, що $AC=2KL$.

30. В кожній клітинці клітчастої дошки 16×30 сидить жук. Чи можуть ці жуки перелетіти на дошку 15×32 так, щоб в кожній клітинці було по жуку і щоб жуки, які були сусідами раніше, залишились сусідами на новій дошці? (Сусідніми вважаються жуки, які сидять в клітинках зі спільною стороною).

31. Є розчин солі певної концентрації. Після випаровування з розчину 1л води його концентрація зросла на 0,05%, а після того як отриманий розчин розбавили 39 літрами води, концентрація зменшилась у 3 рази. Якою була початкова концентрація розчину? (1 кг розчину має об'єм 1л)

32. Із полудня до опівночі Вчений Кіт сидить під дубом, а з опівночі до полудня розповідає казки. На дубі він повісив плакат: «Через годину я буду робити те ж саме, що робив дві години назад». Скільки годин на добу цей надпис правильний? Відповідь обґрунтуйте.

33. У простому двоцифровому числі цифра одиниць на 2 більша за цифру десятків. Якщо до цього числа додати 9, то одержана сума буде більшою за 50, але меншою від 97. Знайти це число.

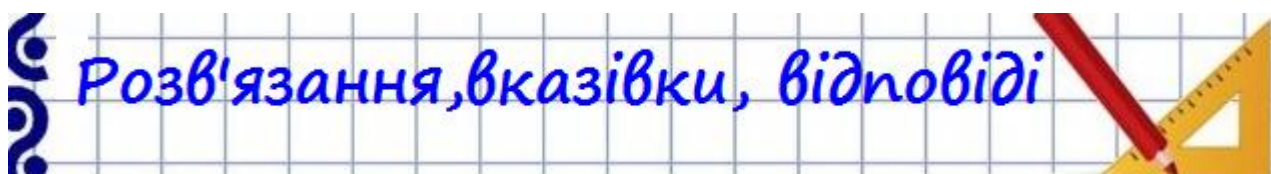
34. Знайти двозначне число, яке менше від суми квадратів його цифр на 11 і більше за їх подвоєний добуток на 5.

35. Шкільний Клуб Любителів Яблук складається із 58 учнів. На чергове засідання кожний хлопчик приніс 15 яблук і роздав їх дівчаткам, а кожна дівчинка принесла 14 яблук і роздала їх хлопчикам. З'ясувалося, що усі хлопчики, які є членами клубу, одержали порівну яблук і усі дівчатка, які є членами клубу, – також (можливо й іншу кількість). Скільки серед членів шкільного клубу хлопчиків і скільки дівчаток? Наведіть усі можливі відповіді і доведіть, що інших немає.

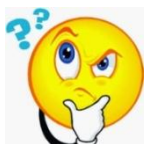
36. Знайдіть хоча б одну пару натуральних чисел, для яких виконується рівність $m^2 + n^2 = 2 \cdot 2009^2 + 2 \cdot 2010^2$ $m^2 + n^2 = 2 \cdot 2009^2 + 2 \cdot 2010^2$

37. Ціну яблук підняли на 20%. Однак для того, щоб записати нову ціну за 1 кг яблук у гривнях, продавцеві було достатнім поміняти місцями цифри числа, записаного на ціннику. Скільки гривень коштував 1 кг яблук до їхнього подорожчання, якщо ця ціна була меншою за 100 гривень? Відповідь обґрунтуйте.
38. Кубок країни з футболу проводиться за олімпійською системою (нічийї не буває; команда, яка програє вибуває). Участь беруть 47 команд. Скільки матчів буде зіграно для визначення володаря кубка ?
39. Опитування показало, що $\frac{2}{3}$ покупців споживають товар А і $\frac{1}{3}$ покупців – товар В. Після того, як була проведена рекламна кампанія товару В, $\frac{1}{4}$ покупців, що надавали перевагу продукту А, стали споживати продукт В. Яким є відношення кількостей споживачів продуктів А та В після рекламної кампанії?
40. Точки А, В, С і D відмічено на прямій у певному порядку. Відомо, що $AB = 13$, $BC = 11$, $CD = 14$, $DA = 12$. Якою є відстань між крайніми двома точками ?
41. На стороні AB трикутника ABC відмітили точку K . Відрізок CK перетинає медіану AM у точці F . Відомо, що $AK = AF$. Знайдіть відношення $MF : BK$.
42. Знайдіть натуральне число n , для якого існує найбільша кількість пар ненульових цифр a, b , що задовольняють умову: $\overline{ab} - \overline{ba} = n$.
43. Стріляючи по мішені, Мишко однакову кількість разів влучив у десятку і у вісімку, та кілька разів потрапив у п'ятірку. Усього він набрав 99 очок. Скільки пострілів зробив Мишко, якщо в 25% пострілів він не влучив у мішень?
44. Двоє гравців по черзі дістають з скриньки кульки. Програє той, хто забирає останню кульку. Хто може забезпечити собі перемогу, перший, чи другий, якщо спочатку в скриньці було 2002 кульки і за один хід можна виймати не менше однієї і не більше п'яти кульок?

45. Шахматист зіграв 40 партій в шахи і одержав у сумі 25 очок (за кожну перемогу – 1 очко, за нічию – 0,5 очок, за поразку – 0 очок). Знайдіть різницю між кількістю його перемог і кількістю його поразок.
46. Мені зараз вдвічі більше років, ніж вам було тоді, коли мені було стільки ж років скільки Вам зараз. Нам обом разом 70 років. Скільки мені років ?
47. Як розрізати квадрат 5×5 прямими лініями так, щоб з одержаних частин можна було б скласти 50 рівних квадратів. Не дозволяється залишати невикористані частини, а також не можна їх накладати одну на другу.
48. Довести, що для довільного цілого числа n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ ділиться на 120.
49. Нехай AD і BE – бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника ABC . З точок D і E проведені перпендикуляри DM і EN до AB . Знайти кут NCM .
50. Учні надіслали завдання, яке містить 20 задач. За кожну правильно розв'язану задачу йому нараховують 8 балів, а за кожну неправильно розв'язану задачу віднімають 5 балів. За задачу, яку він не брався розв'язувати йому нараховують – 0 балів. Учень отримав у сумі 13 балів. Скільки задач він брався розв'язувати ?



5 клас



- Відповідь. 200 літрів.
- Розв'язання. Якщо зняти по одній пачці чаю, то отримаємо що 5 пачок чаю важать 250 г. Отже, 1 пачка чаю важить 50 грам.
- Відповідь: рік не високосний. Розв'язання. Число 2419200 ділиться на 7 (перевіряється безпосередньо). Отже, у лютому 28 днів, а рік - звичайний.

4. Відповідь:

$$\begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 5 \\ 3 \quad 8 \quad 2 \\ \hline 8 \quad 3 \quad 0 \\ 3 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \\ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \hline 1 \quad 5 \quad 8 \quad 5 \quad 3 \quad 0 \end{array}$$

5. Відповідь: $8947 + 8947 = 17894$.

Розв'язання. Зрозуміло, що $3 = 1$ і $A \neq 0$ (інакше $A = Д = 0$). Підставляючи $A = 2, 3, \dots, 9$, знаходимо єдиний розв'язок $8947 + 8947 = 17894$.

6. Розв'язання. $x:6 - 6 = 6$, $x = 72$.

7. Розв'язання. Номери сторінок можуть бути записані одноцифровими і трицифровими числами. Одноцифровими та двоцифровими числами позначені 99 сторінок і на це потрібно 189 цифр. Залишилось $411 - 189 = 222$, $222:3 = 74$ – трицифрових числа. Отже, у підручнику $99 + 74 = 173$ сторінки.

8. Відповідь: парним.

Розв'язання. Якби всі числа були непарними, то їх сума була б парною. Отже, серед цих чисел є парне число. Тоді добуток – парний.

9. Відповідь: 71371371.

Розв'язання. Нехай перша зірочка x , тоді друга $4 - x$, третя - 7, четверта знову x , п'ята $4 - x$, шоста 7, сьома - x , і вона дорівнює 1. Значить, $x = 1$, $4 - x = 3$.

10. Розв'язання. $28:2 = 14$ відер вміщують три діжки ($6:2 = 3$). $14 \cdot 5 = 70$ відер води вміщують 15 діжок ($3 \cdot 5 = 15$).

11. Встановлюємо обидва годинники і, коли пройде 5 хвилин, перевертаємо п'ятихвилинний годинник, а потім, коли закінчить йти семихвилинний

годинник, п'ятихвилинний потрібно перевернути знову, і чекати поки він знову зупиниться. Таким чином відмірюється 9 хвилин.

12. Розв'язання.

$$50 = 0 + 50,$$

$$50 = 2 + 48,$$

$$50 = 4 + 46,$$

$$50 = 6 + 44,$$

$$50 = 8 + 42,$$

$$50 = 10 + 40, \dots,$$

$$50 = 46 + 4,$$

$$50 = 48 + 2,$$

$$50 = 50 + 0.$$

Від 0 до 50 існує 26 парних чисел.

Відповідь: 26 способів.

13. Розв'язання цієї задачі ґрунтується на простому спостереженні: сума парної кількості непарних чисел є парною. Відповідь: не можна.

14. Нехай x – половина усіх вишень і чверть усіх яблунь, тоді $2x+4x=360$.

Відповідь: 120 вишень, 240 яблунь.

15. Відповідь: 4 сливи

16. Відповідь: Білокуров – рудий, Чорний – блондин, Рудий - брюнет.

17. 1) Знали хоча б одну мову $100 - 20 = 80$

2) Не знали французьку $80 - 78 = 2$

3) Не знали німецьку $80 - 65 = 15$

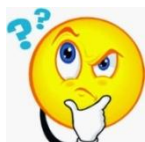
4) Знали дві мови $80 - 2 - 15 = 63$.

Відповідь: 63.

18. На малюнку зображено 32 трикутники.

19. Відповідь. 2400 метрів. З умови задачі випливає, що відстань між першою і третьою зупинками 600 м, отже між першою і другою – 300 м. Зупинок у нас дев'ять, а відстаней між ними вісім, отже 300 помножити на вісім дорівнює 2400 метрів.

20. Відповідь. 8 гривень. Якби Петрик купив яблука за такою ціною, як і його сестра, то заплатив би за свої яблука $6 \times 4 = 24$ грн. оскільки за кожне своє яблуко він заплатив у 3 рази менше, ніж його сестра, то насправді він сплатив $24:3=8$ грн.
21. Відповідь: $2010 = 3 \cdot 333 + 3 \cdot 333 + 3 \cdot 3 + 3$.
22. Відповідь: Виграє перший, якщо першим ходом забере 3 кульки, а за кожен наступний хід він повинен брати стільки кульок, щоб у сумі з кульками, які взяв другий гравець, було 6 кульок, в кінці гри залишилася одна кулька, яка дістанеться другому.
23. Відповідь: Можливо. Використавши дві пари рукавичок, лікар може оглянути двох хворих. Після чого одну з пар треба вивернути і вставити в ці рукавички із другої пари. Отримаємо подвійну пару рукавичок, у якої внутрішня і зовнішня поверхня дезінфіковані.
24. Відповідь: 20 дорослих.
25. Відповідь: 23 роки.



6 клас

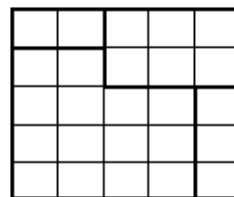
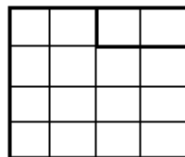
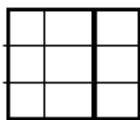
1. Відповідь: 30. Можна розв'язувати з кінця, а можна скласти рівняння:

$$\frac{1}{2}x + 5 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - 5\right) + 5 = x.$$

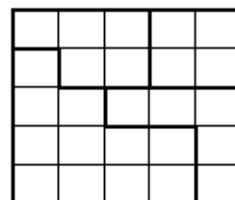
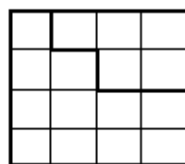
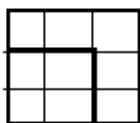
2. Відповідь: так. Можна взяти числа 13 і 7 та сімдесят одну одиницю. І їх добуток, і їх сума рівні 91.
3. Наприклад, $5+40+367+2918=3330$
4. Один з можливих варіантів. Перші чотири дні Вася повинен купувати товар на всі гроші, які він має. Тоді через чотири дні у нього буде 16000 рублів ($1000 - 2000 - 4000 - 8000 = 16000$). На п'ятий день він повинен купити товар на 9000 рублів. У нього залишиться 7000 рублів. Після обіду він продасть товар за 18000 рублів і у нього вийде рівно 25000 рублів.

5. 1-й – лисиці, 2-й – вовку, 3-й – ведмедю. Іван-царевич залишиться цілий, але втратить коня. Серед відповідей є дві повністю протилежні: перша і третя. Отже, друга відповідь належить вовку, а правильною є третя відповідь.

6. Два з можливих варіантів розрізання показані на малюнках



7. Якщо б всі сім сум були простими числами, то



простими були б дві суми по 5 чисел. Кожна з цих сум більша 5. Якщо обидві ці суми були б простими числами більше 5, то кожна з цих сум була б не парна (тому що тільки 2 є парним простим числом). Але якщо ми додамо ці суми, отримаємо парне число. Проте в ці дві суми входять всі числа від 1 до 10 і їх сума дорівнює 55 – непарному числу. Отже серед отриманих сум не більше 6 будуть простими числами. На малюнку показано, як розставити числа в таблиці, щоб отримати 6 простих сум (в нашому прикладі всі суми по 2 числа дорівнюють 11, і $1+2+3+7+6=19$)

1	2	3	7	6
10	9	8	4	5

8. Відповідь: 20. З 27 кубиків виходить куб $3 \times 3 \times 3$. Вуглові кубики пофарбовані з трьох сторін (їх 8 штук), кубики, які знаходяться на ребрах, але не в вершинах, пофарбовані з двох сторін (їх 12 штук - по одному на кожному ребрі). Решта кубики пофарбовані з одного боку (знаходяться всередині межі) або не пофарбовані зовсім (центральный кубик). Отже, Петро взяв $8+12=20$ кубиків.
9. Відповідь: 60 см. Якщо сторони вихідного прямокутника a і b , то у Петра вийшли периметри, рівні $2a+b=40$, а у Васі - рівні $a+2b=50$. Тоді $3a+3b=40+50=90$. Звідки $2a+2b=60$ - периметри вихідних прямокутників.

- 10.** Відповідь: 2, 3, 5, 9, 17, 33 точок. Розв'язання. Зауважимо, що коли на прямий відмічено k точок, то проміжків між ними буде $k - 1$, і якщо у кожний такий проміжок поставити по точці, то всього точок стане $k + (k - 1) = 2k - 1$. Тому якщо точок стало $2k - 1 = 65$, то перед останньою операцією їх було $k = 33$. Аналогічно знаходимо, що до цього їх було 17, потім - 9, 5, 3 і 2. Процес міг починатися з будь-якого з етапів.
- 11.** Відповідь: 110 осіб. Розв'язання. Розглянемо співробітника, який працює більше всіх інших. Тоді першою заяві він не збрехав, тобто він - лицар. Але тоді і друга його заява - правда, отже, знайдуться 100 чоловік в інституті, які отримують більше нього. Бачимо, що з одного боку перші 10 співробітників, які працюють більше, ніж інші - лицарі, а решта - брехуни. З іншого боку, 100 співробітників, які отримують більше за інших - брехуни, а решта - лицарі. Тому всього лицарів і брехунів 110.
- 12.** За тиждень Марічка читає $6 \cdot 4 + 25 = 49$ сторінок. За 6 тижнів вона б прочитала $49 \cdot 6 = 294$ сторінки. Книжку Марічка закінчить на один день раніше. На $6 \cdot 7 - 1 = 41$ день.
- Відповідь 41 день.
- 13.** Відповідь. $2222 - 999 + 11 - 0 = 1234$.
- 14.** Сума цифр даного числа дорівнює 17 і при діленні на 3 дає остачу 2. Число при діленні на 3 дає таку саму остачу, як і сума цифр його числа. Тобто дане число при діленні на 3 дає остачу 2 і не може бути точним квадратом. Відповідь: ні.
- 15.** Отримане число кратне 72, отже ділиться на 8 і на 9. З кратності 8 маємо, що останньою його цифрою може бути лише 4. З кратності 9 маємо, що першою його цифрою може бути лише 4. *Відповідь:* 4104.
- 16.** Сума цифр даного числа дорівнює 300 і ділиться на 3, але не ділиться на 9. Отже це число не може бути повним квадратом. *Відповідь:* Ні.
- 17.** Вказівка. Занумеруємо монети числами 1, 2, 3, ..., 7. Першим зважуванням порівнюємо монети 1, 2, 3 з монетами 4, 5, 6. Якщо маси рівні, то в кожній трійці по одній фальшивій монеті, а монета 7 справжня. Тоді наступним

зважуванням порівняємо монети 1 і 2. Якщо їхня маса однакова, то вони справжні, а якщо ж ні, то важча з монет 1, 2 монета 3 і монета 7 – справжні. Якщо під час першого – початкового – зважування переважила одна з груп, то всі її монети справжні.

18. Вказівка. Прослідкуйте за остачами від ділення цих чисел на 3. Відповідь: ні, не буде.
19. Вказівка. Пронумеруємо гуртки числами 1, 2, 3, 4, 5. Тоді розглянемо 10 груп множин гуртків: {1, 12, 123, 1234, 12345}, {2, 23, 234, 2345}, {3, 34, 345, 3451}, {4, 45, 451, 4512}, {5, 51, 512, 5123}, {13, 134}, {14, 124}, {24, 245}, {15, 135}, {235}. За принципом Діріхле, якісь два учні потраплять до однієї групи, це й будуть шукані учні А і В.
20. Відповідь: ні. Додавати одиницю означає змінювати парність числа.
21. Відповідь: Василь. З двох хлопчиків правду каже Василь, оскільки за 8 вдалих пострілів Петрик одержав 40 додаткових куль, та ще 5 він купив, отже, зробив 45 пострілів, а не 50, як стверджував.
22. Відповідь: 8 і 27 коп. Нехай у лівій кишені Олега було x коп., тоді у правій кишені $35 - x$. Після того як з правої кишені хлопчик переклав в ліву стільки копійок, скільки було в лівій, то в правій кишені стало $35 - x - x$, а в лівій $x + x$, тоді складемо рівняння:

$$x + x + 3 = 35 - x - x;$$

$$2x + 3 = 35 - 2x;$$

$$4x = 32;$$

$$x = 8.$$

В лівій кишені Олега було 8 коп., а в правій 27 коп.

23. Відповідь: так. Розв'язання. Можна взяти числа 13 і 7 та сімдесят одну одиницю. І їх добуток, і їх сума рівні 91.
24. Найменше спільне кратне чисел $2, 3, 4, 5 = 60$. Позначимо через $60V$ початковий об'єм ще не знищеного диску. Тоді після першого дня залишилося $30V$, а після другого дня - $20V$, а після третього дня $15V$ і

після четвертого дня - 12 V. Отже, відношення вцілілої частини диску до початкового об'єму $= \frac{12}{12+12} = \frac{1}{2}$.

25. Виграє перший, якщо першим ходом забере три кульки, за кожен наступний хід він забиратиме скільки кульок, щоб в сумі з кульками, які взяв другий, було 6 кульок. В кінці гри залишиться одна кулька, яка дістанеться другому.
26. Може після кожного такого розрізання загальна кількість кусків паперу збільшиться на 7, а $2002 : 7 = 286$. Отже, це станеться після 285 розрізань.
27. Якщо дівчат у класі x , то хлопців - $2x$. Тоді $2x - x = 8$, $x = 8$. Однокласниць 7.
28. Нехай в класі x учнів, а в даний день y - відсутні, $y = 1/6(x - y) \rightarrow y = 1/7x$.
Коли з класу вийшов учень, то відсутніх стало $y + 1 = 1/5(x - y - 1)$; $y = 1/6x - 1$. Отримаємо $1/7x = 1/6x - 1$, звідки $x = 42$.
29. Якщо тільки 19 учнів мають 13 років, то $13 \times 19 + 12 \times 14$, що менше 430.
30. До першої зустрічі вони проїхали АВ, до другої - 3АВ. Тому один з них проїхав зразу 70 км, а тепер - $70 \times 3 = 210$, а проїхавши ще 40 км, він би проїхав 250 км, тобто 2АВ. Отже, АВ=125 км.
31. Відповідь. 24. 64 рази відрізали по одному чурбаку і ще $88 - 64 = 24$ чурбаків утворилися як залишки 24 колод.
32. Різних букв десять, то серед них є і 0. Але на 0 ділити не можна, то нуль стоїть у чисельнику дробу, тому дріб дорівнює нулю.
33. Відповідь: ні. Вказівка: врахуйте парність.
34. Відповідь: голодний Вінні-Пух важить більше.
35. Відповідь: 231 або 241. Розділимо всіх відмінників перед контрольною на 7рівних груп. Можна вважати, що після контрольної 2 з цих груп стали хорошистами, а інші 5 – залишились відмінниками. Тоді хорошистів у школі стало також рівно 5 груп. Разом кількість відмінників і хорошистів ділиться на 10. Таким чином, з урахуванням трієчника, кількість учнів може бути 231 або 241.
36. Відповідь. 10 або 12 вагонів. Вказівка. Якщо Андрійко ближче до локомотиву, ніж Петрик, то вагонів у потязі буде $5 + 7 = 12$. А якщо Петрик ближче до локомотиву, ніж Андрійко, то вагонів у потязі буде $5 - 2 + 7 = 10$.

37. Відповідь: за 6 днів. Вказівка. Через 1 день (20км шляху) треба зробити запас їжі та води та знову повернутися в початок путі. Тому на весь путь потрібно 6 днів.
38. Відповідь. 37. Вказівка. Нехай $\overline{ab}$ – початкове число. Оскільки $(\overline{ab} - 7) : 10 = \overline{ab} - 34$ є цілим числом, то $b = 7$. Тоді одержуємо $a = 10a + 7 - 34$, тобто $a = 3$.
39. Число ягід на двох сусідніх кушах відрізняється на 1. Тому разом на двох кушах непарна кількість ягід. Усього ягід на восьми кушах буде дорівнювати парному числу, бо сума чотирьох непарних чисел є число парне. Отже, 225 ягід на 8 кушах за умовою задачі бути не може.
40. Відповідь. Ні, не можна. Оскільки число, яке записане лише одними сімками, ділиться на 7, то при будь-якому розміщенні вказаних знаків, сума одержаного виразу буде ділитися на 7. Так як 1999 не ділиться на 7, то відповідь на питання задачі - негативна.
41. Відповідь: 4 способами.
42. Відповідь: у класі перебувало 22 двоногих створіння та 8 чотириногих.
43. Відповідь та вказівки: Євген і Веня – чесні гноми.
Якби Сеня був чесним гномом, то Беня, Веня і Євген були б брехунами і не могли сказати один одному: «Ти-брехун». Тому Сеня – брехун. Це означає, що Беня і Веня не обидва брехуни, а може, обидва чесні, або лише один з них брехун. Євген повинен бути чесним. Тому Беня – брехун, Веня – чесний, Сеня- брехун.
44. Відповідь. 2400 метрів.
45. Відповідь. 8 гривень. Якби Петрик купив яблука за такою ціною, як і його сестра, то заплатив би за свої яблука $6 \times 4 = 24$ грн. оскільки за кожне своє яблуко він заплатив у 3 рази менше, ніж його сестра, то насправді він сплатив $24 : 3 = 8$ грн.
46. Так жити не можна.

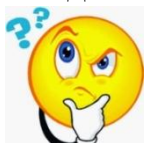
47. Оскільки у дробі у чисельнику й знаменнику використані десять різних букв, то для перетворення даного виразу у числовий потрібно 10 цифр.

У знаменнику нуля бути не може, тому один з множників у чисельнику дорівнює нулю. Отже добуток у чисельнику дорівнює нулю, й значення дробу дорівнює нулю.

48. Відповідь: 163.

49. 250

50. Відповідь 270 сторінок.



7 клас

1. Відповідь: $3930\ 3980 = 7910$. Очевидно, що $A = 0$. Тоді $O \neq 0$, отже, $O = 9$.

Тоді $K + K + 1 = V$. Можливі варіанти 1) $K = 1$, $V = 3$, 2) $K = 2$, $V = 5$, 3) $K = 3$, $V = 7$. $K + L = 10 + D$ (1 переходить в наступний розряд). Перший варіант не підходить, тому що інакше $L = 9$, тоді L співпадає з O . Другий варіант не підходить, оскільки інакше $L = 8$ (тоді $D = 0$ та $A = 0$) або $L = 9$ (тоді L збігається з O). У третьому випадку $L = 7$, $L = 8$, $L = 9$. Якщо $L = 7$, то $D = 0$ і $A = 0$. Якщо $L = 9$, то L збігається з O . Отже, $L = 8$, $D = 1$.

2. Відповідь: 1, 2 і 4. Розв'язання. Нехай a , b , c - задумані цифри. Кожна задумана цифра в кожному розряді використовувалася по три рази. Отже, сума записаних чисел дорівнює $3 \cdot 10 \cdot (a + b + c) + 3 \cdot (a + b + c)$. Звідси $a + b + c = 7$. Будемо вважати, що $a < b < c$. Тоді $a = 1$ (так як навіть $2 + 3 + 4 > 7$), і $b + c = 6$. Цій рівності задовольняє тільки одна пара різних цифр, серед яких немає 1, $b = 2$, $c = 4$.

3. Відповідь: 121. Розв'язання. Оскільки число складене, то його можна розкласти на два множники, більших від 1. Так як воно не ділиться на жодне натуральне число від 2 до 10, то обидва множники не менші 11, а саме число не менше 121. Залишилось зауважити, що 121 не ділиться ні на одне натуральне число від 2 до 10.

4. Відповідь: 12 кілометрів і 4 кілометри. Розв'язання. 1. Так як бігун А пробігає кілометр в 3 рази швидше, ніж бігун Б, то різниця в часі, за який пробігає кілометр Б, і часом, за який пробігає кілометр А, в 2 рази більша часу, за який пробігає кілометр А. Отже, А пробігає кілометр за 5 хвилин. Тоді за годину А пробігає 12 кілометрів, а Б - 4 кілометри. Розв'язання. 2. Нехай v - швидкість в км/год бігуна Б, $3v$ - швидкість бігуна А, t - час у год, за який А пробігає один кілометр. Тоді $3vt = v(t + 1/6) = 1$, звідки $v = 4$.
5. Відповідь: Боря. Розв'язання. Нехай першим ходом Боря примножить 1 на 6 (першим ходом Боря може помножити 1 на 4 або 5; це також призводить до виграшу). Ваня може отримати числа 12, 18, 24, ..., 54. Для кожного числа підбором множника Боря, щоб виграти, повинен отримати число з проміжку від 56 до 111. Він може це зробити, наприклад, так: $12 \cdot 5$, або $18 \cdot 4$, або $24 \cdot 3$, або будь-яке з чисел, що залишилися множаться на 2. Одним ходом не можна з чисел у вказаному проміжку отримати число, більше 1000. Проте Боря наступним своїм ходом, множачи будь-яке записане після ходу Вані число на 9, отримує число, більше 1000.
6. Відповідь: $x=2$, $x=-2$.
7. Вказівка. На стороні вулиці з парними номерами є $12:2=6$ будинків, а на стороні з непарними номерами $17-6=11$ будинків, тому номер останнього будинку на цій стороні вулиці $11 \cdot 2 - 1 = 21$. Відповідь. 21.
8. Вказівка. Нехай n – кількість дубів, з яких обсіпалась рівно половина жолудів, m – кількість дубів, з яких обсіпалась рівно третина жолудів, тоді $18-n-m$ – шукана кількість дубів. Якщо k – кількість жолудів на одному дубі, то з умови задачі одержуємо рівність $\frac{1}{2}nk + \frac{1}{3}mk = \frac{1}{9} \cdot 18k$. Звідси $3n + 2m = 12$, де n і m – натуральні числа. Легко бачити, що $m=3$, а $n=2$. Відповідь: з 13 дубів.
9. Відповідь: 82 або 93. $N=10x+y=xy+66$, або $y=(10x-66)/(x-1)$. Легко бачити, що x може набувати тільки значення 7, 8 або 9.
10. Відповідь: Це число складене.

11. Відповідь. Це неможливо. Розфарбуємо кубики у шаховому порядку у два кольори – білий і чорний. Оскільки кубиків всього непарна кількість, то жуки, які сидять в кубиках одного кольору повинні переповзти в кубики іншого кольору. Але число таких кубиків завідомо має іншу парність.
12. Відповідь. 50 кг. $100 \cdot 0,99 = 99$ (кг) води у 100 кг грибів; $100 - 99 = 1$ (кг) сухої маси у свіжих грибах; $100\% - 98\% = 2\%$ (сухої маси) у підсушених грибах; $1 : 0,02 = 50$ (кг) підсушених грибів.
13. Вказівка. Розглянемо спочатку випадок, коли серед обраних цифр немає нуля. Тоді має бути записано шість попарно різних тризначних чисел: $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$. Сума цих чисел становить $222(a + b + c)$, що неможливо, оскільки 3376 не ділиться без остачі на 222. Отже, серед обраних цифр має бути нуль. Нехай $c=0$ і записані числа мають вигляд $\overline{ab0}, \overline{a0b}, \overline{ba0}, \overline{b0a}$. Їхня сума дорівнює $211(a + b)$. Тоді $211(a + b) = 3376$, тобто $a + b = 16$. Оскільки цифри a і b мають бути різними, то цими цифрами є 7 і 9. Відповідь: було обрано цифри 0, 7 і 9.
14. $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n 3^2 - 2^n 2^2 + 3^n - 2^n = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 3^n 10 - 2^n 5 = 3^n 10 - 2^{(n-1)+1} 5 = 3^n 10 - 2^{n-1} 10 = 10(3^n - 2^{n-1})$. Оскільки один з множників ділиться на 10, то і весь добуток ділиться на 10. Отже, при будь-якому натуральному n значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ ділиться націло на 10.
15. До числа 21 треба дописати таку цифру справа, щоб трицифрове число ділилося на 7. Це буде число 217. $217:7=31$. До числа 31 треба дописати таку цифру справа, щоб трицифрове число ділилося на 13. Це буде число 312. $312:13=24$. Отже, Олег задумав число 24.
16. Відповідь: ні. Дівчат у гуртку не менше ніж 9% і не менше ніж двоє. Тобто $9/100$ загальної кількості не менше ніж 2 особи. Звідси загальна кількість учнів, що займаються у гуртку не менша за $200/9 = 22, 222$. Отже у гуртку щонайменше 23 дитини, а хлопців не менше ніж $23 - 2 = 21$.

17. Відповідь: 36 і 27. Нехай зараз сестрі x років, тоді братові $63 - x$ років. Вік сестри дорівнював $(63 - x) - x = 63 - 2x$ років тому. Братові тоді було $63 - x - (63 - 2x) = 2x - 63$ років. Маємо рівняння $x = 2(126 - 3x)$.
18. Відповідь: Банан. Парність кількості бананів не змінюється в обох варіантах зривання плодів. Вихідна кількість бананів непарна, тому кількість бананів залишається непарною. Отже, останнім фруктом може бути лише банан.
19. Відповідь: 105. Розв'язання. Нехай шукане число має вигляд $abc = 100a + 10b + c$. Тоді згідно умови задачі отримуємо: $100a + 10b + c = 7(10a + c)$. Звідси $30a + 10b = 6c$. Цю рівність поділимо на 2. $15a + 5b = 3c$. $5(3a + b) = 3c$. З останньої рівності випливає, що c ділиться націло на 5. Розглянемо два випадки: 1) $c = 0$. Тоді $15a + 5b = 0$. Оскільки a і b є цифрами числа, то рівність може виконуватись тільки в тому разі, коли $a = b = 0$. Проте утворити трицифрове число з трьох цифр, які всі дорівнюють 0, неможливо. 2) $c = 5$. Тоді $15a + 5b = 15$. Звідси $3a + b = 3$. Оскільки a як перша цифра трицифрового числа не може бути нулем, то $3a = 3$. З цього можна зробити висновок, що $b = 0$, $a = 1$.
20. Вказівка. Розглянути два випадки: 1) Якщо $x \geq 0$, то $|x| = x$. 2) Якщо $x \leq 0$, то $|x| = -x$. Відповідь: $x_1 = 4020$; $x_2 = -1340$.
21. Ділимо всі монети на 3 купи, дві купи по 81 монеті і одна – 80 монет. Проведемо зважування двох куп по 81 монеті. Отримаємо два випадки:
- 1) Якщо одна чаша переважила, значить в більш легкій чаші фальшива монета.
 - 2) Якщо терези в рівновазі, то фальшива монета серед 80 монет.
- Розглянемо перший випадок:
- 1 крок. 81 монету ділимо на три купи по 27 монет. Фальшива монета серед 27 монет на чаші, якщо вона легша, або на купі, яка залишилася.
- 2 крок. 27 монет ділимо на три купи по 9 монет. Фальшива монета серед 9 монет на чаші, якщо вона легша, або на купі, яка залишилася.

3 крок. 9 монет ділимо на три купи по 3 монети. Фальшива монета серед 3 монет на чаші, якщо вона легша, або на купі, яка залишилася.

4 крок. 3 монети ділимо на три купи по 1 монеті. Фальшива монета на чаші, якщо вона легша, або та що залишилася.

Розглянемо другий випадок:

До 80 монет добавимо одну справжню монету із терезів. Тоді матимемо 81 монету. Здійснюємо зважування аналогічні 1-4 крокам першого випадку.

Таким чином, фальшиву монету можна визначити 5 зважуваннями.

22. Очевидно, що іще залишився хоча б один кекс. Зважуємо двох поросят.

а) Якщо $P_1 = P_2$, то можливі випадки: 1) P_1 і P_2 з'їли по 1 кексу. 2) P_3 з'їв 2 кекси. 3) P_3 і ЧШ з'їли по 1 кексу.

Друге зважування: порівнюємо $P_1 + \text{Кекс}$ і P_3 . Якщо $P_1 + K > P_3$, то 1 випадок, якщо $P_1 + K = P_3$, то 3 випадок, якщо $P_1 + K < P_3$, то 2 випадок.

б) Якщо $P_1 > P_2$, то можливі випадки:

1) P_1 і P_3 з'їли по 1 кексу. 2) P_1 з'їв 2 кекси. 3) P_1 і ЧШ з'їли по 1 кексу.

Друге зважування: порівнюємо P_1 і $P_3 + K$. Якщо $P_1 > P_3 + K$, то 2 випадок, якщо $P_1 = P_3 + K$, то 3 випадок, якщо $P_1 < P_3 + K$, то 1 випадок.

23.
$$2^{2003} - 2^{2002} - 2^{2001} - \dots - 2^2 - 2 - 1 = 2^{2002}(2 - 1) - 2^{2001} - \dots - 2^2 - 2 - 1 =$$
$$2^{2001}(2 - 1) - 2^{2000} - \dots - 2^2 - 2 - 1 = 2^2(2 - 1) - 2 - 1 = 2(2 - 1) - 1 = 1$$

24. Оскільки число $a + 3b + c$ ділиться на 3, то $a + c$ ділиться на 2 і число **AB** ділиться на 3. Двоцифрових чисел, кратних 3 є 30 і до кожного з них можна поставити одну з десяти цифр від 0 до 9, а трицифрових чисел є $30 \cdot 10 = 300$.

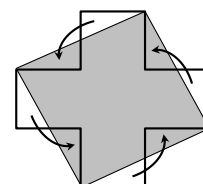
25. Ці суми можуть прийняти лише сім різних значень відповідно до них можна застосувати принцип Діріхле.

26. 500кг маси з 85% води містить 15% целюлози, тобто 75кг становитиме 25% у масі з 75% вмістом води. Отже, ця маса $= (12 \cdot 25)\text{кг} = 300\text{кг}$. Тому мас випаровуватись $(500 - 300)\text{кг} = 200\text{кг}$ води.

27. Відповідь: 5 г.

28. Відповідь: 114°

29. Відповідь: 45°
30. Якщо хтось із пасажирів знає інших чотирьох, то в кожного із п'яти пасажирів число знайомих не менше одного і не більше чотирьох. Якщо ж немає пасажирів, що знає всіх, то в кожного з п'яти число знайомих 0 і не більше 3. Знову застосуємо принцип Діріхле.
31. Відповідь: 2311.
32. Відповідь: 2 і 3.
33. Відповідь: 19. Сторона непарна і кількість будинків непарна: $247 = 13 \times 19$, сума номерів будинків обчислюється як добуток номера середнього будинку на кількість будинків, тобто номер середнього будинку 19, всього будинків 13.
34. Відповідь: 25 грибів. Нехай Микола та Ярина разом зібрали x грибів. З них білих – 52%. Тому білих грибів було $\frac{13x}{25}$. Оскільки розглядається ціла кількість грибів, то x має бути кратним 25. Тоді $x = 25$, або $x = 50$ (бо разом зібрали не більше 70 грибів). Варіант $x = 50$ не підходить, оскільки, коли віднімемо 3 гриба, лишиться 47, що не кратне 2. Значить грибів зібрали 25, серед них 13 білих. Коли викинули 3 найменших, залишилось 22 гриба, серед яких 11 білих. Тобто серед викинутих опинилось 2 білих гриба.
35. Припустимо, що це можливо, тоді сума чисел в шести гранях разом менше 6000, але 2008×3 більше 6000. Протиріччя.
36. До першої зустрічі вони проїхали AB , до другої – $3AB$. Тому один проїхав до другої зустрічі $70 \text{ км} \cdot 3 = 210 \text{ км}$. Проїхавши ще 40 км, він проїхав би $2AB$. Тому $AB = 125 \text{ км}$.
37. Розв'язок. Дивись малюнок.
38. Вказівка: покладіть спочатку на шальки по 1 кільцю.
39. Неможна. Загальне число всіх з'єднань визначається так:
 $19 \cdot 13/2$. Але це дробове число.
40. Відповідь: можливо. Для цього досить знайти число, у якого багато двозначних дільників, і додати до нього 7. Наприклад, $5047 = 7! + 7$. Дійсно,



число $7!$ Має достатню кількість двозначних дільників:
14,21,28,35,42,56,63,70,84,12,24,36,48,60,72,10,20,30,40,60,80,90.

41. Відповідь. Могла. Припустимо, що автомобіль Насті рухався протягом $\frac{3}{2}$ години, перші та останні $\frac{1}{2}$ години він рухався зі швидкістю x км/год, а протягом $\frac{1}{2}$ всередині він рухався зі швидкістю y км/год. Тоді його середня швидкість протягом будь-якої години всередині руху складає $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 80$
 $\Rightarrow y = 160 - x$. А його середня швидкість на усьому шляху дорівнює:

$$v = \frac{S}{t} = \frac{x \cdot 1 + y \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x + y}{3} = \frac{2x + 160 - x}{3} = \frac{x + 160}{3} = 100, \text{ звідки } x = 140.$$

Тобто при швидкості 140 на першій та третій півгодині шляху, та швидкості 20 протягом середньої півгодини будемо мати потрібну умову.

42. Відповідь. 333333 або 33334. Зрозуміло, що таке число не може ділитись на 3, 6, 9 та 5. Так само воно не може ділитись на 4 та 8, бо останні дві цифри можуть бути лише 33 або 34. Таким чином воно може ділитись максимум на три числа: 1, 2 та 7. Щоб число ділилося на 2, остання його цифра повинна бути рівна 4. Залишається підібрати число вигляду 33...334, щоб воно було кратним 7. Нескладно перевірити, що найменше таке число 33334. Це число ділиться на три числа з наведеної множини. Або якщо використовувати лише трійки, то можна утворити число 333333, що ділиться на 4 дільники.

43. Відповідь: $AC = 9$ см. Позначимо $AC = x$. Тоді з умов задачі зрозуміло, що $7 < x < 11$, тому x може приймати значення 8, 9 або 10. Якщо $x = 8$, то це суперечить нерівності трикутника для $\triangle ACD$, бо $AD + AC = CD$. Якщо $x = 10$, то це суперечить нерівності трикутника для $\triangle ABC$, бо $AB + BC = AC$. Залишається єдина припустима можливість $x = 9$ яка очевидно і є правильною, бо не призводить до жодної суперечності.

44. $2010 = 3 \cdot 333 + 3 \cdot 333 + 3 \cdot 3 + 3$

45. Відповідь: 1003.

46. Відповідь: 17 нулів.

47. Розв'язання:

	Акація	Береза	Верба	Граб
кравець	-	-	+	-
водій	-	-	-	+
тесля	+	-	-	-
швець	-	+	-	-

48. Число ділиться на 36, якщо воно ділиться на 4 і на 9. Так як сума цифр $5+2+2=9$, то сума пропущених двох цифр повинна дорівнювати 0; 9 або 18. Враховуючи, що число повинно ділитися на 4, а передостання цифра дорівнює 2, то остання цифра може бути 0; 4 або 8. Отже відповіді можуть бути: 52524; 52128; 52020; 52920.

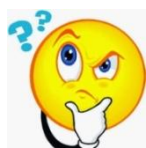
49. 16 частин.

50. Нехай S_1 - протяжність підйомів, а S_2 - рівна поверхня, S_3 - протяжність спусків. Тоді час, витрачений дідом на маршрут дорівнює:

$$T = \frac{S_1}{6} + \frac{S_2}{7} + \frac{S_3}{8}, \text{ а внуком } t = \frac{S_1}{4} + \frac{S_2}{7} + \frac{S_3}{20}.$$

А) Підйомів менше ніж спусків.

Б) Визначити не можна.



8 клас

1. Розв'язання. Нехай $n-1$, n , $n+1$ - послідовні натуральні числа.

$$(n-1)n(n+1) + n = n^3 - n + n = n^3.$$

2. Відповідь: 12 клітин. Розв'язання. З умови випливає, що існують клітини кожного кольору. Якщо якогось кольору буде тільки одна клітина, то в неї має бути 5 різнокольорових сусідів, що неможливо. Отже, кожного

1	2	3	4
3	4	5	6
6	1	5	2

кольору хоча б по дві клітини, а всього - не менше 12 клітин. Приклад (не єдиний).

3. Відповідь: ні. Розв'язання. Якщо в парі стоять два лицарі або два брехуни, то вони один про одного скажуть «він лицар». Якщо в парі стоять лицар і брехун, то вони обидва скажуть «він брехун». Таким чином, кожна фраза виголошена парне число разів. Якби цих фраз було порівну, то кожна фраза пролунала б по 2010: 2 = 1005 разів. А це число непарне.
4. Відповідь: ні. Розв'язання: Розглянемо добуток даних чисел. Спочатку він дорівнює 48. Зауважимо, що число 48 не є квадратом натурального числа. Якщо якісь два з даних чисел множаться на деяке натуральне число n , добуток даних чисел множиться на n^2 . Отже, якщо воно не було квадратом натурального числа, воно їм і не стане. Але якщо всі наявні числа стануть рівними між собою, то їх добуток буде квадратом. Тому, такими операціями не можна вирівняти наявні числа.
5. Відповідь 3. Складемо рівняння $x = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$.
6. Розв'язання. Припустимо, що кульок кожного кольору не більше семи. Це означає, що різних кольорів не менше шести (інакше кількість кульок не більше $7 \cdot 5 = 35$). Тоді взявши по одній кульці кожного з 6 кольорів, отримаємо протиріччя з умовою задачі.
7. Відповідь. Ні. $x^3 - x = (x-1)x(x+1)$ ділиться на 3, а ліва частина при діленні на 3 дає остачу 1.
8. Нехай $\overline{abcd}$ – шукане чотирицифрове число. Тоді чисел $\overline{3bcd}$ одержимо 60 ($1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$), а чисел $\overline{a3cd}$, $\overline{ab3d}$ і $\overline{abc3}$ по 48 ($4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 = 48$). Маємо: $60 + 3 \cdot 48 = 204$.
9. Вказівка. Нехай задане число $\overline{ab2} = \overline{ab} \cdot 10 + 2$. Тоді число після перестановки $\overline{2ab} = 200 + \overline{ab}$. За умовою $\overline{ab} \cdot 10 + 2 - 36 = 200 + \overline{ab}$. Звідси $\overline{ab} = 26$ і сума цифр шуканого числа $2+2+6=10$. Відповідь. 10.
10. Якщо $\overline{abc}$ – шукане тризначне число, то за умовою задачі $a^2 + b^2 + c^2 = 100a + 10b + c - 517$. Очевидно, що $a \geq 5$. Запишемо рівність у вигляді $(b-5)^2$

$= a(100 - a) - 492 - c(c - 1)$ і побудуємо таблицю для можливих значень виразу $c(c - 1)$.

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c(c - 1)$	0	0	2	6	12	20	30	42	56	72

Якщо $a = 5$, то $(b - 5)^2 = 5 \cdot 95 - 492 - c(c - 1) = -17 - c(c - 1) < 0$. Отже, $a \geq 6$.

Якщо $a = 6$, то $(b - 5)^2 = 6 \cdot 94 - 492 - c(c - 1) = 72 - c(c - 1) = \begin{bmatrix} 72 - 56, \\ 72 - 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16, \\ 0. \end{bmatrix}$

(див. таблицю). Звідси $b - 5 = \pm 4$, $b = 1$, $b = 9$, якщо $c = 8$, або $b - 5 = 0$, $b = 5$, якщо $c = 9$. Маємо три числа 618, 698, 659.

Якщо $a = 7$, то $(b - 5)^2 = 7 \cdot 93 - 492 - c(c - 1) = 159 - c(c - 1) \geq 87$, що неможливо, тому що найбільше значення виразу $(b - 5)^2$ дорівнює 25. Перебір закінчено.

11. Вказівка. Подамо даний дріб у вигляді $n + 2 - \frac{8}{n}$. Вираз $n + 2$ набуває

натурального значення при будь-якому натуральному n . Тому вираз

$n + 2 - \frac{8}{n}$ набуває цілого значення, якщо значення виразу $\frac{8}{n}$ є цілим числом.

Це можливо лише при натуральних значеннях n : 1, 2, 4, 8. Відповідь. 1, 2, 4, 8.

12. Вказівка. $p = \frac{A + B}{2} = \frac{185^3}{21^3}$. Отже, $\frac{37}{21}x = \frac{185}{21}$, $x = 5$. Відповідь. $x = 5$.

13. Вказівка. Нехай $\angle HBD = \alpha$, $\angle ABH = \beta$, $\angle CBD = \gamma$. Оскільки DB – бісектриса кута CDA , то $\angle CDB = \angle BDA$, а враховуючи паралельність BC і AD , маємо, що $\angle CDB = \angle CBD = \gamma$. Отже, $\angle BAD = \angle CDA = 2\gamma$ (бо трапеція рівнобічна). Тому $2\gamma + \beta = 90^\circ = \alpha + \gamma$, і $\alpha = \beta + \gamma$.

14. Вказівка. Розіб'ємо монети на три купки: A , B і C , що містять по 10, 10 і 20 монет відповідно. Перше зважування: порівняємо вагу A і B . Можливі два

випадки. Якщо $A=B$, то порівнюємо вагу $A+B$ і C . Якщо $A>B$ (другий випадок аналогічний), то розіб'ємо C на дві купки по 10 монет і порівняємо їхню вагу.

- 15.** Розв'язання. Якщо n не кратне 3, то його можна записати, як $n = 3k + 1$ або $n = 3k + 2$, де $k \in \mathbb{Z}$. Тоді

$$n^2 + 8 = (3k + 1)^2 + 8 = 9k^2 + 6k + 1 + 8 = 9k^2 + 6k + 9 = 3(3k^2 + 2k + 3) \text{ або}$$

$$n^2 + 8 = (3k + 2)^2 + 8 = 9k^2 + 12k + 4 + 8 = 9k^2 + 12k + 12 = 3(3k^2 + 4k + 4).$$

В обох випадках вирази містять множник 3, отже $n^2 + 8$ кратне 3, що й треба було довести.

- 16.** Позначимо через x км відстань, яку Тарас іде пішки. Цю ж відстань Олег іде на велосипеді. Тепер їм залишилося подолати відстань $(20-x)$ км, яку вже Тарас може їхати, а Олег мусить йти пішки. На дорогу Тарас затратить

$$\frac{x}{4} \text{ год,} \quad \text{їдучи пішки, і} \quad \frac{20-x}{15} \text{ год,} \quad \text{їдучи на велосипеді. Олег пішки буде йти}$$

$$\frac{20-x}{5} \text{ год, а їхати} \quad \frac{x}{20} \text{ год. Оскільки брати одночасно вирушили в дорогу і}$$

повинні одночасно прибути до бабусі, то має місце рівняння:

$$\frac{x}{4} + \frac{20-x}{15} = \frac{20-x}{5} + \frac{x}{20};$$

$$\frac{x}{4} + \frac{20-x}{15} - \frac{20-x}{5} - \frac{x}{20} = 0;$$

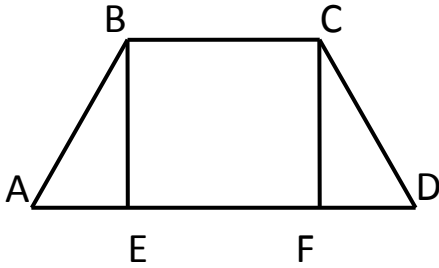
$$\frac{15x + 80 - 4x - 240 + 12x - 3x}{60} = 0;$$

$$20x = 160; \quad x = 8.$$

$$\frac{x}{4} + \frac{20-x}{15} = \frac{8}{4} + \frac{20-8}{15} = 2 + \frac{12}{15} = 2\frac{4}{5} (\text{год.}) = 2 \text{ год. } 48 \text{ хв.}$$

Відповідь: На дорогу кожен з братів затратив 2 год. 48 хв.

- 17.** Перший спосіб



Нехай $ABCD$ – дана трапеція, $AB=CD$ – бічні сторони. За умовою $AD=2BC$, $BC=AB=CD$.

Позначимо $AB=CD=BC=x$, тоді $AD=2x$.

Проведемо висоти: BE і CF . Оскільки $BCEF$ – прямокутник, то $EF=BC=x$. Утворені

прямокутні трикутники AEB і DFC рівні за гіпотенузою і катетом: $AB=CD$,

$BE=CF$ (як висоти трапеції). Тому $AE = FD = \frac{AD - EF}{2} = \frac{2x - x}{2} = \frac{x}{2}$.

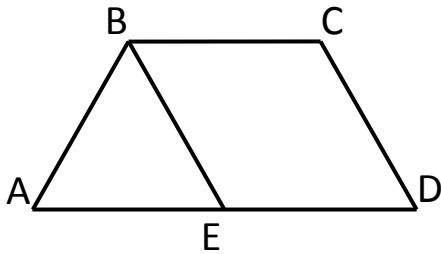
В $\triangle AEB$: $AE = \frac{AB}{2}$, звідки кут $\angle ABE = 30^\circ$, а $\angle BAE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Отже, в даній трапеції: $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = \angle A = 60^\circ$,

$$\angle C = \angle B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Відповідь: $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$.

Другий спосіб



Нехай $ABCD$ – дана трапеція, $(AD \parallel BC)$, $AB=CD$ – бічні сторони. За умовою $AD=2BC$, $BC=AB=CD$.

Позначимо $AB=CD=BC=x$, тоді $AD=2x$.

Проведемо $BE \parallel CD$. $BCDE$ – паралелограм,

тому $ED=BC=x$, $BE=CD=x$,

$AE=AD-ED=2x-x=x$. Трикутник ABE рівносторонній, бо $AB=BE=AE=x$.

Отже, в даній трапеції: $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = \angle A = 60^\circ$, $\angle C = \angle B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Відповідь: $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$.

18. Перетворимо обидві частини тотожності:

$$\frac{(a+b)}{a+(a-b)} = \frac{a+b}{2a-b};$$

$$\begin{aligned}\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3} &= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+(a-b))(a^2-a(a-b)+(a-b)^2)} = \\ &= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(2a-b)(a^2-a^2+ab+a^2-2ab+b^2)} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(2a-b)(a^2-ab+b^2)} = \frac{a+b}{2a-b}\end{aligned}$$

Ліва і права частина тотожності дорівнюють одному і тому самому виразу.
Тотожність доведено.

- 19.** Відповідь. 152. Розв'язання. Нехай x - кількість глядачів до зниження ціни, а y - нова ціна квитка. За умовою задачі $1,14 \cdot 200x = 1,5xy$. Звідси $y = 152$.
- 20.** Відповідь. 84. Розв'язання: Припустимо, що це число закінчується на 5. Тоді воно не може закінчуватись на 9, а тому, більше 20. Так як ціле число, більше 20, не може бути менше 21, і шукане число ділиться на 12. Але число, що ділиться на 12, парне, і тому не може закінчуватися на 5. Протиріччя. Отже, шукане число ділиться на 7. Єдине двозначне число, що ділиться на 7 і закінчується на 9 - це 49. Але число 49 не ділиться на 12 і більше 21. Протиріччя. Тому шукане число більше 20 і ділиться на 12. Єдине двозначне число, що ділиться на 7 і 12 - це 84.
- 21.** Ні, не існують, бо $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, і тому система відповідних рівнянь $\{x^2 - y^2 = 2002\}$ цілих розв'язків не має. Інакше, оскільки 2002 є число парне, а парні повинні бути і співмножниками $(y-x)(y+x) = x^2 - y^2 = 2002$, тобто ліва частина ділиться на чотири, а права лише на 2, що неможливо.
- 22.** Якщо сума цифр числа $n^2 (n \in \mathbb{N}) = 2003$, то воно не ділиться на 3, відповідно і число n не ділиться на 3 (при діленні на 3 дає остачу 1 або 2). Але тоді n^2 при діленні на 3 дає остачу 1. Але остача від ділення на 3 числа 2003 дорівнює 2. Звідси, суми цифр числа, яке є точним квадратом, не може дорівнювати 2003.
- 23.** Вказівка. Виграє перший, якщо буде ходити так, щоб після кожного виправлення розташування плюсів було симетричним відносно середин заданого рядка.
- 24.** Не можна, бо тоді сума чисел у кожному рядку, а отже, і в усій таблиці, була би парною. Але $1+2+\dots+25=325$ - непарне число.

25. $(x-1)x(x+1)=3y^2+1$; $(x-1)x(x+1)$ ділиться на 3, $3y^2+1$ не ділиться на 3. Отже розв'язків не існує.
26. Знайдеться 7 учнів, які розв'язали разом $35 - (1+2+3)=29$ задач. Оскільки $29 > 7 \cdot 4$, то знайдеться учень, який розв'язав не менше 5 задач.
27. Відповідь: 59.
28. Відповідь. 540° ,
29. $\angle BCK = \angle CKB$ і $\angle DCK = \angle KCB$. Тому $\angle CKB = \angle KCB$, $\triangle KBC$ - рівнобедрений. $KB = BC = OC$, Нехай E - середина BC , $\triangle KLC = \triangle KEC$ за двома сторонами і кутом між ними. Але KE - середня лінія $\triangle ABC$, Отже, $AC=2KE$. А тому $AC=2KL$.
30. Ні. Жуки із внутрішнього прямокутника повинні перелетіти у внутрішній прямокутник, але $(16-2) \times (30-2)=392$, а $(15-2) \times (32-2)=390$. Протиріччя.
31. Відповідь. 0,9%. Вказівка: Нехай об'єм розчину m л, його концентрація $x\%$, $\frac{mx}{100}$ - кг маса солі. Після випаровування: об'єм розчину $(m-1)$ л, а його

концентрація $\frac{mx}{(m-1)}\%$. За умовою $\frac{mx}{(m-1)} = x + 0.05$.

Коли розчин розбавили, то отримали $(m+38)$ л - об'єм розчину, кількість

$$\begin{array}{l} \text{солі} \quad - \quad \frac{mx}{100} \quad \text{кг.} \end{array} \quad \frac{mx}{(m+38)} = \frac{x}{3} \text{ кг.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{mx}{m-1} = x + 0,05; \\ \frac{mx}{m+38} = \frac{x}{3}. \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 3m = m + 38; \quad \frac{19x}{18} = x + 0,05; \\ 2m = 38; \quad 19x = 18 + 18 \cdot 0,05 \\ m = 19. \quad x = 0,9 \end{array}$$

Відповідь: 0,9%.

32. Відповідь. 18 годин. Вказівка. З'ясуємо проміжки часу, протягом яких надпис хибний. Вони починаються за годину до того моменту, коли Кіт змінює вид діяльності, і продовжуються ще дві години після цього моменту. Таким чином, надпис буде хибним з 11-ти годин до 14-ти годин і з 23-ох

годин до 2-ох годин, тобто 6 годин на добу. В інший час надпис буде правильним, тобто це буде відбуватися протягом 18-ти годин на добу.

- 33. Відповідь:** 79. Вказівка Нехай задане число $\overline{ab} = 10a + b$, якщо $b = a + 2$, то $\overline{ab} = 10a + a + 2 = 11a + 2$, $50 < 11a + 2 + 9 < 97$, $39 < 11a < 86$, тоді $a = 4; 5; 6; 7$, $b = 6; 7; 8; 9$.

Серед чисел 46, 57, 68, 79 тільки 79 є простим.

- 34. Відповідь:** 95; 15. Вказівка. За умовами задачі складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \overline{ab} + 11 = a^2 + b^2, \\ \overline{ab} = 2ab + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 10a + b + 11 = a^2 + b^2, \\ 10a + b = 2ab + 5; \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab - 5 - 11 = 0, \quad (a - b)^2 = 16,$$

$$a - b = \pm 4, \quad \begin{cases} a = b + 4, \\ a = b - 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10(b + 4) + b = 2(b + 4) \cdot b + 5, \\ 10(b - 4) + b = 2(b - 4) \cdot b + 5; \end{cases} \Rightarrow$$

$$b_1 = -\frac{14}{4}; \quad b_2 = 5, \quad b_3 = 4,5; \quad b_4 = 5. \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} a = 9, \\ a = 1. \end{cases}$$

- 35. Відповідь.** У клубі 29 хлопчиків і 29 дівчаток, або 28 хлопчиків і 30 дівчаток. Вказівка. Нехай x – кількість хлопчиків у клубі, тоді кількість дівчаток дорівнює $58 - x$, де x – натуральне число, $0 < x < 58$. Дівчатка разом принесли $14(58 - x)$ яблук. Нехай кожний хлопчик отримав по n яблук, де n натуральне число. Тоді $14(58 - x) = nx$. Звідси $(n + 14)x = 14 \cdot 58$. Отже, x – дільник числа $14 \cdot 58 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 29$. Враховуючи обмеження $0 < x < 58$, одержуємо, що x може набувати значень 1, 2, 4, 7, 14, 28 і 29. Умові задачі будуть задовольняти ті значення, для яких $15x$ (це число яблук, що принесли хлопчики) повинно ділитися на $58 - x$ (це кількість дівчат). Цій умові задовольняють лише $x = 28$ і $x = 29$.

- 36. Скористайтесь** формулою $2a^2 + 2b^2 = (a - b)^2 + (a + b)^2$ і одержимо $m = 1$, $n = 4019$. Насправді, є ще одна пара таких чисел $m = 2911$, $n = 2771$.

- 37. Відповідь.** 45 грн. З умови випливає, що початкова ціна яблук у гривнях була двоцифровим числом, кратним п'яти. Дійсно $20\% = \frac{1}{5}$ і оскільки цифра одиниць цього числа не може бути нулем (інакше нова ціна починатиметься з нуля) та при перестановці цифр число повинно збільшитися, то достатньо

перевірити числа 15, 25, 35 і 45. Із цих чисел тільки 45 при перестановці цифр збільшується на 20%.

38. Відповідь: 46 матчів. Тільки одна команда не програла жодного матчу в кубковому турнірі, переможець турніру. Всі решта рано чи пізно були переможені і вибули з турніру. Всього їх 46. Саме стільки і відбулося матчів, адже кожна команда програла в якомусь одному матчі, а кожний матч закінчувався поразкою однієї з команд.

39. Відповідь: 1. Після рекламної кампанії частка покупців, що споживають товар В, стала рівною $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

40. Відповідь та вказівки: оскільки $BC + CD = BA + AD$ і $BC < BA$, то точки на прямій можуть бути розміщені або в порядку В, С, А, D, або в порядку D, А, С, В. В обох випадках відстань між крайніми точками дорівнює $BC + CD = 11 + 14 = 25$.

41. Відповідь: $MF : BK = 1 : 2$. Проведемо MN – середню лінію $\triangle BCK$ (рис. 2). Тоді $\angle AKF = \angle AFK = \angle NFM = \angle FNM$, тому $\triangle FMN$ – рівнобедрений. Звідси $FM = MN = \frac{1}{2} BK$.

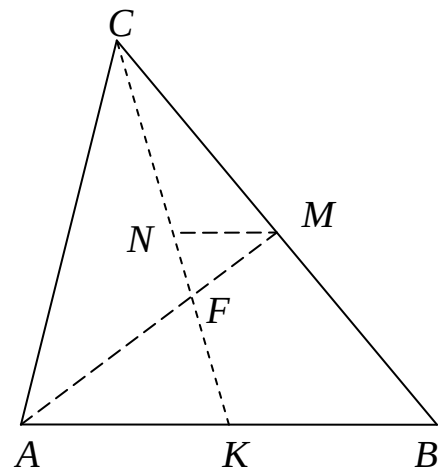


Рис. 2

42. Відповідь: $n = 9$. Зрозуміло, що $a > b$, тому можемо записати таку рівність: $n = \overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9(a - b)$. Таким чином $n = 9k$. Залишається зрозуміти для якого натурального числа k існує максимальна кількість пар цифр, різниця між якими дорівнює k . Очевидно, що це $k = 1$, для якого існує 8 пар шуканих цифр. Тому $n = 9$.

43. Нехай Мишко x разів потрапив у десятку та y в п'ятірку. Тоді $10x + 8x + 5y = 99$ або $18x + 5y = 99$, але x, y – натуральні числа, тому $x = 3, y = 9$, бо в решті випадків $99 - 18x$ не ділиться на 5. Тому кількість попадань дорівнює $x + x + y = 3 + 3 + 9 = 15$, а кількість пострілів дорівнює $15 : (1 - 0,25) = 20$.

44. Відповідь: Виграє перший, якщо першим ходом забере 3 кульки, а за кожен наступний хід він повинен брати стільки кульок, щоб у сумі з кульками, які взяв другий гравець, було 6 кульок, в кінці гри залишилася одна кулька, яка дістанеться другому.

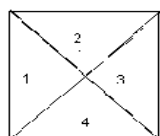
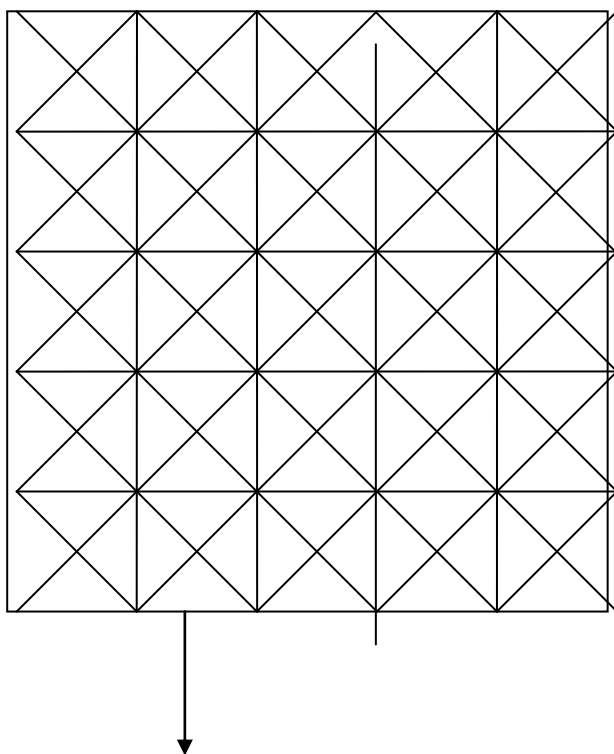
45. Якщо x - кількість перемог, а y - кількість поразок, то $(40-x-y)$ - кількість нічиїх. Кількість набраних очок, дорівнює:

$$x + 0,5(40 - x - y) = 0,5(x - y) + 20 = 25. \text{ Тоді: } x - y = 10.$$

46. Нехай вам було x - років, а мені $-y$. Тепер вам $(x+t)$ –років, а мені - $(y+t)$.З а умовою задачі маємо:

$$\begin{cases} y + t = 2x, \\ x + t = y, \\ x + t + y + t = 70, \end{cases} \begin{cases} x = 20, \\ y = 30, \\ t = 10. \end{cases} \text{ Мені тепер 40 років.}$$

47. Розв'язання:



48. Розв'язання:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

Серед п'яти послідовних чисел знайдеться одне. Яке ділиться на 5.

Тому добуток п'яти послідовних чисел ділиться на 5. Серед чотирьох послідовних чисел знайдеться хоча би одне число, яке ділиться на 4, та ще одне з цих чисел є парне. Тому добуток чотирьох послідовних чисел ділиться на 8. Серед трьох послідовних чисел знайдеться одне число, яке ділиться на 3. Отже й добуток трьох послідовних чисел ділиться на 3. Маємо, що добуток п'яти послідовних чисел ділиться на добуток $5 \cdot 8 \cdot 3 = 120$. Що й треба було довести.

49. 45° .

50. Учень брався розв'язувати 13 задач.



Варіант 1



Завдання I (шкільного) етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики

5 клас

I частина містить 6 завдань у тестовій формі. За кожне виконане завдання нараховується 0-2 бали. Загальна кількість балів – 12.

II частина містить 4 завдання з відкритою відповіддю. За кожне виконане завдання нараховується 0-6 балів. Загальна кількість балів – 24.

I частина завдань

1. Наповнена доверху водою посудина важить 5 кг, а наповнена наполовину – 3 кг 250 г. Скільки води вміщає посудина?

А. 3 кг	Б. 3 кг 500 г.	В. 3кг 750 г .	Г. 4 кг
---------	----------------	----------------	---------

2. Земельну ділянку від дороги загородили прямим штахетом, довжиною 100м. скільки для цього треба стовпчиків, якщо відстань між двома сусідніми, становить 2м?

А. 50	Б. 52	В. 51	Г. 49
-------	-------	-------	-------

3. На шести квадратах написали числа (див. малюнок). Яке найменше число можна скласти , використовуючи всі ці квадрати?

309	41	5	7	68	2
-----	----	---	---	----	---

А. 413097568	Б. 2309415687	В. 24139095768	Г. 5413092687
--------------	---------------	----------------	---------------

4. Ви стоїте навпроти будинку, номер якого 53 (непарна сторона вулиці). Мимо скількох будинків по цій стороні ви маєте пройти, щоб дійти до будинку, номер якого в три рази більший, якщо на вулиці немає будинків з однаковими номерами?

А. 51.	Б. 53.	В. 54.	Г. 106.
--------	--------	--------	---------

5. Четверо друзів грали у футбол. Ось що вони говорять:

Тарас: «Гол забив або я, або Сашко».

Сашко: «Гол забив не я і не Дмитро».

Дмитро: «Один з них сказав неправду».

Данило: «Ти помиляєшся, Дмитро».

Хто ж забив гол, якщо тільки троє з них сказали правду?

А. Тарас.	Б. Сашко.	В. Дмитро.	Г. Данило.
-----------	-----------	------------	------------

6. На прямій позначили декілька точок. Потім позначили середини відрізків, що сполучають сусідні точки. Всього позначеними виявилися 137 точок. Скільки точок позначили спочатку?

А. 63	Б. 68	В. 67	Г. 69
-------	-------	-------	-------

II частина завдань

7. На двох шальках терезів стояли 24 гирі: на лівій шальці тільки п'ятикілограмові, на правій – тільки трикілограмові. Терези знаходяться в рівновазі. На якій шальці більше гир і на скільки?

8. Виписали підряд числа від 1 до 100 (1234567 ... 99100). Скільки одиниць є у цьому величезному числі?

9. У трьох кишенях у Карлсона лежать три монети – одна золота, друга срібна, а третя — бронзова. Монета, яка лежить в найбільшій кишені не

золота, срібна монета знаходиться не в середній кишені. А в найменшій кишені лежить не золота і не срібна монета. Яка з них де лежить?

- 10.** Назвемо числа «дзеркальними», якщо справа наліво воно читається так само, як і зліва направо. Наприклад, число 98889 – «дзеркальне». Знайдіть усі «дзеркальні» п'ятизначні натуральні числа, в записі яких використовується тільки цифри 2 та 0. Відповідь обґрунтуйте.

Відповіді:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Правильна відповідь	Б	В	Б	Б	А	Г

- 7.** Число гирь на правій шальці кратно 5, тобто воно може дорівнювати 5 або 10 або 15 або 20. Але тоді на лівій шальці відповідно або 19, або 14, або 9, або 5 гирь. Оскільки, число гирь на лівій шальці повинно ділитися на 3, маємо, що на правій шальці 15 гирь, а на лівій – 9.

Відповідь. На правій на 6 більше.

- 8.** $1+11+9 = 20$ Відповідь. 20

- 9.** Зразу із умови випливає, що в самій найменшій кишені знаходиться бронзова монета. Тоді в найбільшій кишені – срібна, а в середній – золота монета.

- 10.** 20002, 22022, 22222, 20202. Оскільки першою цифрою натурального числа не може бути нуль, то першою цифрою усіх чисел буде 2, а так як числа є «дзеркальними», то і останньою цифрою теж буде 2.



Завдання I (шкільного) етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики

6 клас

I частина містить 6 завдань у тестовій формі. За кожне виконане завдання нараховується 0-2 бали. Загальна кількість балів – 12.

II частина містить 4 завдання з відкритою відповіддю. За кожне виконане завдання нараховується 0-6 балів. Загальна кількість балів – 24.

I частина завдань

1. Довжина прямокутного поля дорівнює 80 м, а площа 3200 м^2 . Знайдіть довжину іншого прямокутного поля, площа і ширина якого у 2 рази менша, ніж першого поля.

А. 20 м	Б. 40 м	В. 60 м	Г. 80 м
----------------	----------------	----------------	----------------

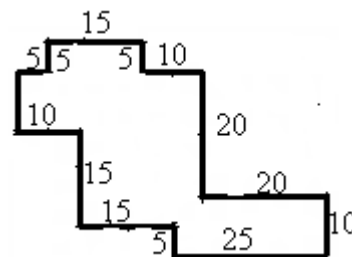
2. Знайти найменше натуральне число, яке має тільки десять дільників.

А. 91	Б. 92	В. 96	Г. всі попередні пункти хибні
--------------	--------------	--------------	--------------------------------------

3. На алеї від будинку до озера росте 17 дерев. Юрко, ідучи з дому до озера, відмітив крейдою перше дерево, а потім кожне друге дерево. На зворотньому шляху до будинку він знову відмітив перше дерево (від озера), а потім кожне третє дерево. Скільки дерев залишилось невідміченими?

А. 4	Б. 5	В. 6	Г. 7
-------------	-------------	-------------	-------------

4. Газон, що має форму многокутника, зображеного на рисунку (розміри вказані в метрах), засівали травою. На кожні 30 м^2 витратили 0,3 кг насіння. Скільки кг насіння знадобилося для озеленення газону?



А. 9 кг	Б. 6 кг	В. 12 кг	Г. 7,5 кг
----------------	----------------	-----------------	------------------

5. Вкладник поклав у два банки різні суми грошей. Через деякий час він подвоїв внесок у першому банку, в результаті його загальний внесок в два банки

збільшився на 60%. Скільки відсотків від первинного сумарного внеску в обидва банки складав внесок у другому банку?

А. 80%.	Б. 60%.	В. 40%.	Г. 30%.
----------------	----------------	----------------	----------------

6. На прямій позначили декілька точок. Потім позначили середини відрізків, що сполучають сусідні точки. Всього позначеними виявилися 137 точок. Скільки точок позначили спочатку?

А. 63	Б. 68	В. 67	Г. 69
--------------	--------------	--------------	--------------

II частина завдань

7. Знайдіть найбільше натуральне число, у якого всі цифри різні та кожні дві сусідні цифри відрізняються щонайменше на 2.

8. З пошкодженої книги випала частина зшитих разом аркушів. Номер першої сторінки, що випала, – 143. Номер останньої записано тими самими цифрами, але в іншому порядку. Скільки аркушів випало з книги?

9. Два фермери поставили на терези мішки з мукою. Терези показали, що маси мішків 50 кг і 40 кг. Коли вони поставили на терези обидва мішки, терези показали 100 кг.

- Як це так? – вигукнув перший. – $50 + 40$ не дорівнює 100.

- Хіба ти не бачиш? – відповів другий. – Просто у терезів зрушена стрілка.

Так скільки ж важили мішки насправді?

10. Знайдіть усі трицифрові числа, які зменшуються в п'ять разів після виокреслення першої цифри.

Відповіді:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Правильна відповідь	Г	Г	Б	А	В	Г

7. Відповідь. 9758642031

Зрозуміло, що число не може мати більше ніж 10 цифр, крім того, воно повинно бути десятицифровим, бо таке число завжди більше за число, яке має меншу кількість цифр. З двох чисел з однаковою кількістю цифр більшим є те, у якого більшою є цифра у найвищому розряді. Таким чином, будемо ставити відповідні цифри по місцях.

975 – перші три цифри; другою цифрою не може бути 8, так само, як і третьою. 864 – наступні три цифри.

Далі не може стояти цифра 3, а має стояти 2 і 0. Тому останні цифри мають бути 31.

8. Можливі номери останньої сторінки – 341, 314, 413, 431. Оскільки перший аркуш починається з непарного номера, то друга сторона останнього аркуша занумерована парним числом. Серед наведених номерів одне парне число – 314. Отже, число випавших аркушів дорівнює $(314 - 142) : 2 = 86$

9. Нехай x – похибка вимірювання маси. Тоді маси мішків $50 + x$ и $40 + x$, а маса обох мішків – $100 + x$. Маємо рівняння:

$50 + x + 40 + x = 100 + x$. Звідси $x = 10$. Маса мішків 60 кг и 50 кг.

10. Відповідь. 125,250, 375.

Нехай ABC - шукане число, $A \neq 0$, $B \neq 0$. За умовою $ABC \equiv 5 \cdot BC$, звідси $c \equiv 5$, тобто $c=0$ або $c=5$. Якщо $c=0$, то $5a = 2b$, звідки $b = 5$, $a = 2$, якщо $c=5$, то $5a = 2b + 1$, звідки $b = 2$ або $b = 7$. Якщо $b=2$, то $a=1$. Якщо $b=7$, то $a=3$.



Завдання I (шкільного) етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики

7 клас

I частина містить 6 завдань у тестовій формі. За кожне виконане завдання нараховується 0-2 бали. Загальна кількість балів – 12.

II частина містить 4 завдання з відкритою відповіддю. За кожне виконане завдання нараховується 0-6 балів. Загальна кількість балів – 24.

I частина завдань

1. На клітчастому папері намальовано квадрат розміром 8×8 клітинок. Яку найбільшу кількість клітинок цього квадрата може перетинати пряма, проведена на папері?

А. 8	Б. 18	В. 15	Г. 16
------	-------	-------	-------

2. Якщо натуральне число закінчується на цифру 7, тоді сота степінь цього числа закінчується на цифру

А. 1	Б. 7	В. 9	Г. 3
------	------	------	------

3. На координатній площині позначили точки, у яких координати – натуральні числа, що не перевищують 9. Знайдіть суму координат цих точок.

А. 720.	Б. 810.	В. 900.	Г. Відповідь відрізняється від наведених..
---------	---------	---------	--

4. На уроці математики Богдан записав деяке число. Потім він поділив його на 7 і додав 7, а отриманий результат помножив на 7. У відповіді отримав 777. Визначте яке число Богдан записав спочатку.

А. 777	Б. 728	В. 7	Г. 49
--------	--------	------	-------

5. Визначте у скільки разів збільшиться трицифрове число, якщо до нього дописати поруч таке саме число?

А. 1000	Б. 111	В. 1001	Г. 3
---------	--------	---------	------

6. Куб склеєний з 27 однакових кубиків. Скільки клею було потрібно на його склеювання, якщо на склеювання двох граней потрібно 1 г клею?

А. 63 г	Б. 27 г	В. 64 г	Г. 54 г
---------	---------	---------	---------

II частина завдань

7. Чи можна відвести камені вагою 370 кг, 372 кг, 374 кг, ... , 466 кг, 468 кг сімома вантажівками, кожний з яких перевозить не більше 3 тони?

8. Половину мотка мотузки використали для сушки білизни, половиною частини, що залишилася, підв'язали квіти до кілочків. Половиною частини, що залишилася, перев'язали лижі, а трьома п'ятими частини, що залишилася, зв'язали віник з лозин. Залишилося всього 40 см. Якою є довжина мотузки в мотку?

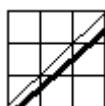
9. Буквами a, b, c позначено три різні цифри. Якщо додати все шість трицифрових чисел, утворених з цих цифр, не повторюючи одну і ту саму цифру двічі, то отримаємо число 5328. Знайдіть ці цифри.

10. В акваріумі живе 200 рибок. З них 1% голубого кольору, решта жовті. Скільки жовтих рибок потрібно забрати з акваріуму, щоб голубі риби становили 2% рибок, що залишилися в акваріумі?

Відповіді:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Правильна відповідь	В	А	Б	Б	В	Г

1.



3. $(1; 1), (1; 2), \dots, (1; 9), (2; 1), \dots, (2; 9), \dots, (9; 1), \dots, (9; 9)$. $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$. Таких сум 9, с, сума всіх ординат дорівнює $45 \cdot 9 = 405$. Сума всіх абсцис також дорівнює 405. Відповідь. 810

6. У 27 кубиків 162 грані. Із них зовнішніх – $9 \cdot 6 = 54$. Склеюються 108 грані, що утворюють 54 пари. Отже, потрібно 54 г клею.

7. Не можна. Всього каменів 50 штук. $50 = 7 \cdot 7 + 1$. Отже одна вантажівка повинна перевезти 8 каменів. Але вага 8 найлегших каменів $370 + 372 + \dots + 384 = 3016$ кг, а це більше 3 т.

8. Нехай x – довжина мотузки в мотку, тоді для сушки білизни використали $\frac{x}{2}$

м, для підв'язки квітів – $\frac{x}{4}$ м, для перев'язування лиж – $\frac{x}{8}$ м, на віник пішло $\frac{3x}{40}$

м. За умовою маємо рівняння: $x - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{3x}{40} \right) = 0,4$ або $\frac{1}{20}x = 0,4$, $x = 8$

(м).

9. Сума останніх цифр даних трьохзначних чисел дорівнює $2(a + b + c)$. Вона може дорівнювати 48, 38, 18 або 8. Враховуючи першу цифру в сумі всіх чисел, робимо висновок, що $a + b + c = 24$. Це рівняння можна отримати, записавши умову в такому вигляді: $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 5328$ або $100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a = 5328$ або $222(a + b + c) = 5328$ або $a + b + c = 24$. Отже, шуканими цифрами можуть бути тільки 7, 8, 9.

10. Кількість рибок голубого кольору $200 \cdot 0,01 = 2$, щоб вони становили 2 %, в акваріумі повинно бути 100 рибок, тому вони повинні забрати $200 - 100 = 100$ рибок з акваріуму.



Завдання I (шкільного) етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики

8 клас

I частина містить 6 завдань у тестовій формі. За кожне виконане завдання нараховується 0-2 бали. Загальна кількість балів – 12.

II частина містить 4 завдання з відкритою відповіддю. За кожне виконане завдання нараховується 0-6 балів. Загальна кількість балів – 24.

I частина завдань

1. Білка за 8 хвилин приносить горіх у дупло. На якій відстані від дупла знаходиться горішник, якщо без горіха вона біжить зі швидкістю 5 м/с, а з горіхом – 3 м/с.

А. 100 м	Б. 500 м	В. 750 м	Г. 900 м
----------	----------	----------	----------

2. В Антона однокласників на 7 більше, ніж однокласниць. У його класі хлопців вдвічі більше, ніж дівчат. Скільки однокласниць у Антонової однокласниці Марійки?

А. 5	Б. 7	В. 8	Г. 9
------	------	------	------

3. В одному місяці три неділі припадають на парні числа. Який день тижня припадає на 20-те число цього місяця?

А. середа	Б. вівторок	В. понеділок	Г. четвер
-----------	-------------	--------------	-----------

4. Від квадратного аркушу картону відрізали смугу шириною 3 см. Площа частини, що залишилася, дорівнює 70 см^2 . Якою є початкова площа аркушу картону?

А. 106 см^2	Б. 100 см^2 .	В. 94 см^2 .	Г. 85 см^2 .
-----------------------	-------------------------	------------------------	------------------------

5. На прямій позначили декілька точок. Після цього позначили середини відрізків, що сполучають сусідні точки. Цю процедуру повторили ще тричі. В результаті на прямій відміченими виявилось 177 точок. Скільки точок позначили спочатку?

А. 46	Б. 49	В. 24	Г. 23
-------	-------	-------	-------

6. Обчисліть значення виразу $a^2 + b^2 + c^2$, якщо $a + b + c = 7$ і $ab + bc + ac = -5$

А. 49	Б. 59	В. 50	Г. 69
-------	-------	-------	-------

II частина завдань

7. Чи існують цілі числа, які задовольняють рівнянню $x^3 - x = 3y^2 + 1$?

8. Семеро піратів хочуть розділити скарб, який складається з 55 золотих злитків вагою 306г, 307г, ..., 359г, 360г відповідно. Кожен з піратів буде задоволеним, якщо йому дістанеться принаймні 2,5 кг золота (і ні на грам менше). Чи можуть пірати розділити скарб, не розпилюючи злитки так, щоб кожен був задоволений?

9. Задача Безу. Дехто купив коня і через деякий час продав його за 24 пістолі (пістоль – грошова одиниця Франції в минулому). При цьому він втратив стільки відсотків від попередньої вартості, скільки пістолів заплатив за коня. За яку суму він сам купив коня?

10. Чи може сума цифр натурального числа, яке є точним квадратом, дорівнювати 2003?

Відповіді:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Правильна відповідь	Г	А	А	Б	Г	Б

5. Нехай спочатку відмітили k точок. Тоді відрізків, що сполучають сусідні точки, буде $k - 1$. Отже, відмітили ще $k - 1$ точок. А потім ще два рази повторили процедуру відмічання середин відрізків. В результаті отримали спочатку $2k - 1$ точок, потім $4k - 3$ точок і, вкінці, $8k - 7$ точок. За умовою, $8k - 7 = 177$ або $8k = 184$, $k = 23$.

7. $(x-1)x(x+1)=3y^2+1$; $(x-1)x(x+1)=: 3, 3y^2+1$ не ділиться на 3. Отже розв'язків не існує.

8. Не можуть. Хтось з піратів обов'язково одержить не більше 7 злитків. Але вага 7 навіть найважчих злитків $360 + 359 + 358 + \dots + 354 = 2499(\text{г}) < 2,5(\text{кг})$.

9. Нехай він купив коня за x пістолів. Маємо рівняння: $x - \frac{x^2}{100} = 24$. Маємо два розв'язки: $x_1=40$, $x_2=60$.

10. Якщо сума цифр числа n^2 ($n \in \mathbb{N}$) $= 2003$, то воно не ділиться на 3, відповідно і число n не ділиться на 3 (при діленні на 3 дає остачу 1 або 2). Але тоді n^2 при діленні на 3 дає остачу 1. Але остача від ділення на 3 числа 2003 дорівнює 2. Звідси, суми цифр числа, яке є точним квадратом, не може дорівнювати 2003.

Варіант 2



Завдання I (шкільного) етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики

5 клас

I частина містить 6 завдань у тестовій формі. За кожне виконане завдання нараховується 0-2 бали. Загальна кількість балів – 12.

II частина містить 4 завдання з відкритою відповіддю. За кожне виконане завдання нараховується 0-6 балів. Загальна кількість балів – 24.

I частина завдань

1. П'ять чисел записано у порядку зростання. Різниця між числами, що стоять поряд дорівнює 3. Сума всіх п'яти чисел 100. Чому дорівнює найбільше з цих чисел?

A. 17	Б. 20	В. 26	Г. 28
--------------	--------------	--------------	--------------

2. У гаманці в Семена три купюри: 1 гривня, 2 гривні і 5 гривень. Яку ціну, із запропонованих у відповіді, Семен не може заплатити без здачі?

A. 3 гривні	Б. 7 гривні	В. 6 гривні	Г. 4 гривні
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

3. На терезах потрібно зважити 15 кг борошна, маючи тільки гирю 1 кг. Яка найменша кількість зважувань для цього потрібна?

A. 3	Б. 4	В. 5	Г. 15
-------------	-------------	-------------	--------------

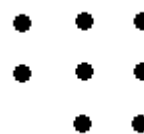
4. У кожного марсіаніна по 4 руки. Сто марсіанінів вишикувались у ряд і кожен взяв за одну руку того, хто стоїть поруч із ним. Скільки рук у марсіанінів залишилось вільними.

A. 200	Б. 202	В. 300	Г. 302
---------------	---------------	---------------	---------------

5. У класі 9 хлопчиків і 13 дівчаток. Рівно половина дітей класу бере участь у олімпіаді. Яка найменша кількість дівчаток бере участь у олімпіаді?

A. 0	Б. 1	В. 2	Г. 3
-------------	-------------	-------------	-------------

6. Скільки квадратів можна побудувати, з'єднуючи зображені справа точки відрізками?



A. 3	Б. 4	В. 7	Г. 8
-------------	-------------	-------------	-------------

II частина завдань

7. Їдучи по лісовій дорозі, Іван-царевич зустрів ведмедя, вовка та лисицю. Ведмідь завжди говорить правду, лисиця завжди бреше, а вовк по черзі каже правду і бреше, завжди починаючи з правди. Звірі сказали Івану-царевичу по 2 речення. 1-й: «Ти коня врятуєш». «Але сам загинеш». 2-й: «Ти цілий неушкодженим залишишся». «І коня врятуєш». 3-й: «Ти цілий залишишся».

«Але коня не врятуєш». Визначте, якому із звірів належить кожна відповідь і що чекає Івана царевича попереду.

8. Семеро гномів народилося в один день протягом семи послідовних років. Трьом наймолодшим 42 роки разом. Скільки років трьом найстаршим разом?
9. У числі 7 ***** 1 замініть зірочки цифрами так, щоб сума будь-яких трьох сусідніх цифр дорівнювала 11. Знайдіть всі розв'язання і доведіть, що інших немає.
10. Квіткар продає 24 білі, 42 червоні і 36 жовтих троянд. Яку найбільшу кількість однакових букетів він може зробити, якщо хоче використати всі квітки.

Відповіді та вказівки:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Правильна відповідь	В	Г	В	Г	Г	Б

7. 1-й – лисиці, 2-й – вовку, 3-й – ведмедю. Іван-царевич залишиться цілий, але втратить коня. Серед відповідей є дві повністю протилежні: перша і третя. Отже, друга відповідь належить вовку, а правильною є третя відповідь.

8. Нехай x – вік наймолодшого гнома. Тоді $x+(x+1)+(x+2)=42$, $3x=39$. Вік трьох найстарших гномів дорівнює $(x+4)+(x+5)+(x+6)=3x+15=54$.

9. Відповідь: 71371371. Розв'язання. Нехай перша зірочка x , тоді друга $4-x$, третя -7 , четверта знову x , п'ята $4-x$, шоста 7 , сьома $-x$, і вона дорівнює 1 . Отже, $x=1$, $4-x=3$.

10. Відповідь. 6. У кожному букеті буде по 4 білих, 7 червоних та 6 жовтих троянд.



Завдання І (шкільного) етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики

6 клас

І частина містить 6 завдань у тестовій формі. За кожне виконане завдання нараховується 0-2 бали. Загальна кількість балів – 12.

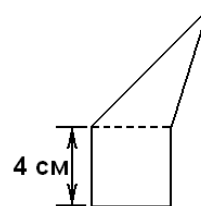
ІІ частина містить 4 завдання з відкритою відповіддю. За кожне виконане завдання нараховується 0-6 балів. Загальна кількість балів – 24.

І частина завдань

1. У шостому класі навчається 30 дітей. У диктанті Незнайко зробив 14 помилок, більше від усіх. Яка найбільша кількість учнів, що зробили однакову кількість помилок, обов'язково знайдеться в класі, якщо є й такі, хто не зробив жодної помилки?

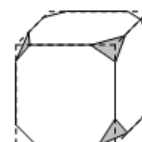
А. 2	Б. 3	В. 4	Г. 5
------	------	------	------

2. Трикутник і квадрат, що мають однакові периметри, розміщені так, як це зображено на малюнку. Який периметр утвореної фігури?



А. 12 см	Б. 24 см	В. 26 см	Г. 32 см
----------	----------	----------	----------

3. У кубі обрізано всі його кути, як це показано на малюнку. Скільки ребер в утвореній фігурі?



А. 26	Б. 30	В. 36	Г. 40
-------	-------	-------	-------

4. Ліфт може перевозити одночасно або 12 дорослих, або 20 дітей. Скільки дітей зможе їхати у ліфті одночасно з дев'ятьма дорослими?

А. 2	Б. 3	В. 4	Г. 5
------	------	------	------

5. Бабуся спекла торт для внуків, що мають приїхати до неї у гості на канікули. Але вона не знає точно, три, п'ять чи шість внуків у неї гостюватимуть. Для того, щоб кожний внук отримав однакову частину торта, бабуся, передбачаючи всі три випадки, повинна розрізати торт на ...

А. 6 частин	Б. 10 частин	В. 20 частин	Г. 30 частин
-------------	--------------	--------------	--------------

6. Яку найбільшу кількість цифр можна стерти у 1000-цифровому числі 20082008...2008 так, щоб сума цифр, що залишилася, дорівнювала 2008?

А. 260	Б. 510	В. 746	Г. 749
--------	--------	--------	--------

II частина завдань

7. П'ять шестикласників стали в шеренгу і тримають 37 прапорців. У всіх справа від Тані – 14 прапорців, справа від Яші – 32 прапорця, справа від Віри 20, справа від Максима – 8. Скільки прапорців у Даші?

8. Сума 2010 натуральних чисел - непарне число. Яким числом - парним або непарним - є добуток цих чисел?

9. При нумерації сторінок книжки всі номери, кратні трьом, були вилучені, і сторінки у книжці занумерували так: 1, 2, 4, 5, 7, 8 і т. д. Якщо у книжці всього 88 сторінок, то який номер стоїть зараз на останній сторінці?

10. Є три аркуші паперу. Будь-який аркуш розрізують на 4 частини, потім деякі (або всі) частини знову розрізують на 4 частини і т. д. Чи можна при цьому дістати 2013 частин аркуша?

Відповіді та вказівки:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Правильна відповідь	Б	Б	В	Г	Г	В

7. Відповідь. 6

8. Відповідь: парним.

Розв'язання. Якби всі числа були непарними, то їх сума була б парною. Отже, серед цих чисел є парне число. Тоді добуток – парний.

9. У книжці 44 листки. Між кожними двома сусідніми листками вставимо ще по одній уявній сторінці. Всього таких уявних сторінок 43. Занумеруємо отриману книжку звичайним чином. Кожна уявна сторінка отримає номер, кратний

трьом, а всі справжні – номери, як в умові задачі. Всього у такій книжці $88 + 43 = 131$ сторінок.

10. Відповідь: Після k -го розрізання кількість кусочків збільшується на 3, тому загальна кількість листочків $3+3 \cdot k$, або згідно умови рівняння $2013 = 3 + 3 \cdot k$, що має цілий корінь, $k=670$. Отже можна отримати на 670 розрізанні.



Завдання I (шкільного) етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики

7 клас

I частина містить 6 завдань у тестовій формі. За кожне виконане завдання нараховується 0-2 бали. Загальна кількість балів – 12.

II частина містить 4 завдання з відкритою відповіддю. За кожне виконане завдання нараховується 0-6 балів. Загальна кількість балів – 24.

I частина завдань

1. Знайдіть суму коренів рівняння: $3|x-2|-10=2$.

A. 4	Б. -4	В. 8	Г. -8
-------------	--------------	-------------	--------------

2. Петро їде на велосипеді з міста А в місто В з постійною швидкістю. Якщо він збільшить свою швидкість на 3 м/с, то доїде до міста В втричі швидше. Визначте, у скільки разів швидше Петро добереться до міста В, якщо його швидкість збільшиться на 6 м/с.

A. 4	Б. 4,5	В. 5	Г. 5,5
-------------	---------------	-------------	---------------

3. Один із суміжних кутів у два рази більший від їх різниці. Знайдіть менший із цих кутів.

A. 50°	Б. 40°	В. 60°	Г. 72°
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

4. Дмитрик прочитав книгу за 3 дні. Першого дня він прочитав $\frac{1}{4}$ книги, другого дня 40% остачі, а третього дня – решту 99 сторінок. Визначте, скільки сторінок у книзі.

A. 200	Б. 220	В. 240	Г. 250
---------------	---------------	---------------	---------------

5. Відомо, що для деяких цілих чисел a, b, c, d, e виконується рівність $a+1=b-3=c+2=d-2=e-4$. Визначте, яке з них є найбільшим.

A. a	B. b	B. c	Г. e
--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

6. П'ятицифрове число $35x8y$ ділиться на 4, 5 і 9. Знайдіть суму цифр $x + y$.

A. 4	B. 2	B. 5	Г. 9
-------------	-------------	-------------	-------------

II частина завдань

7. Василько має коробку розмірами $5\text{см} \times 4\text{см} \times 3\text{см}$. Хлопець змінив кожен з даних розмірів на однакову величину, при цьому об'єм коробки збільшився на 1260 см^3 . Визначте, на яку величину Василько змінив розміри коробки.
8. Спростіть вираз $x^4 + 0,39x^3 - 0,61x^2 + 2x - 0,22$ та обчисліть його значення при $x = 0,61$.
9. У мене є три відра води, кожне з яких містить цілу кількість літрів. Якщо вилити повне перше відро води в друге, то ємкість другого буде заповнена на $\frac{2}{3}$, а якщо в третє, то вона заповниться на $\frac{3}{4}$ його об'єму. Одного разу я наповнював бочку в 30 літрів, виливши туди послідовно перше, друге і третє відра води, але не наповнив бочки. Визначте, скільки літрів води ще треба долити в бочку, щоб її наповнити.
10. Чи може число, у десятковому записі якого використано 100 одиниць та 100 двійок, а решта цифр – нулі, бути точним квадратом?

Відповіді та вказівки:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Правильна відповідь	A	B	B	Б	Г	Б

7. Відповідь. 7

8.

$$\begin{aligned}
 x^4 + 0,39x^3 - 0,61x^2 + 2x - 0,22 &= x^4 + (1 - 0,61)x^3 - 0,61x^2 + 2x - 0,22 = \\
 &= x^4 + x^3 - 0,61x^3 - 0,61x^2 + 2x - 0,22 = x^3(x - 0,61) + x^2(x - 0,61) + 2(x - 0,11) = \\
 &= (x - 0,61)(x^3 + x^2) + 2(x - 0,11) = (0,61 - 0,61)(0,61^3 + 0,61^2) + 2(0,61 - 0,11) = 2 \cdot 0,5 = 1.
 \end{aligned}$$

9. Нехай об'єм першого відра x л. Тоді другого — $\frac{2}{3}x$ л, а третього — $\frac{3}{4}x$ л. Оскільки x , $\frac{2}{3}x$ та $\frac{3}{4}x$ — цілі, то $x + \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x = \frac{23}{6}x$ — ціле. Оскільки сума менше 30, то $x=6$. Легко бачити, що при $x = 6$ $\frac{2}{3}x$ та $\frac{3}{4}x$ — цілі. Звідси у бочку влило 23 л і потрібно долити до повного $30 - 23 = 7$ (л).
10. Ні. Сума цифр числа 300, отже воно ділиться на 3, але не ділиться на 9.



Завдання I (шкільного) етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики

8 клас

I частина містить 6 завдань у тестовій формі. За кожне виконане завдання нараховується 0-2 бали. Загальна кількість балів — 12.

II частина містить 4 завдання з відкритою відповіддю. За кожне виконане завдання нараховується 0-6 балів. Загальна кількість балів — 24.

I частина завдань

1. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}} = \sqrt{2}$

А. -2	Б. $4+4\sqrt{2}$	В. $\sqrt{2}$	Г. Немає коренів
-------	------------------	---------------	------------------

2. Червона Шапочка спекла пиріжки для своєї бабусі: 7 з капустою, 6 з яблуками і 3 з м'ясом. По дорозі до бабусі вона з'їла 2 пиріжки. Визначити, яка з наступних ситуацій є можливою.

А.	Бабуся не отримає жодного пиріжка з м'ясом
Б.	Бабуся отримає менше пиріжків з яблуками, ніж з м'ясом
В.	Бабуся отримає однакову кількість пиріжків усіх видів
Г.	Бабуся отримає однакову кількість пиріжків двох видів

3. Точки А, В, С і D ділять коло на дуги так, що дуги АВ, ВС, CD і AD відносяться як 3:4:5:6. Знайдіть кут між хордами AC і BD.

А. 60°	Б. 80°	В. 50°	Г. 90°
---------------	---------------	---------------	---------------

4. Вага шпака відноситься до ваги жайворонка як 5,5 : 2, а вага ластівки становить 75% ваги жайворонка і на 7г менша від неї. Визначте вагу жайворонка.

А. 21 г	Б. 28 г	В. 30 г	Г. 49 г
---------	---------	---------	---------

5. Спростіть вираз: $\left(\frac{x^{-4}}{y^{-4}} + \frac{y^{-2}}{x^{-2}}\right)$

А. $\frac{x^2 y^2}{x+y}$	Б. $xy^2 - x^2 y$	В. $\frac{x^3 y^3}{x+y}$	Г. $x - y$
--------------------------	-------------------	--------------------------	------------

6. Який кут утворюють годинникова та хвилинна стрілки годинника у 9 год 20 хв?

А. 150°	Б. 180°	В. 160°	Г. 90°
---------	---------	---------	--------

II частина завдань

7. На базі два підприємця закупили разом 300 кг товару за ціною 25 грн. за 1кг. Перший підприємець перевозить товар на відстань 20 км від бази, а другий – на 30 км. Перевезення 100 кг товару на відстань 1 км коштує 5 грн. Визначте, скільки товару закупив перший підприємець, якщо відомо, що він витратив на закупівлю і перевезення товару на 1125грн менше, ніж другий.

8. Підприємець купив комп'ютер на 40% дешевше від середньої ціни такого комп'ютера у магазині, а на завтра продав цей комп'ютер на 25% дешевше вказаної середньої ціни такого комп'ютера у магазині. Скільки відсотків прибутку отримав підприємець?

9. У комітеті утворили 4 підкомітети, кожним з яких керують по 3 людини з комітету. Для узгодження їхніх дій, кожні два підкомітети серед керівників мають рівно одного спільного члена. Яка найменша кількість людей може бути в комітеті?

10. Маємо 9 гирь, на яких написано, що вони важать 1г, 2г, 3г, ..., 9г відповідно. Відомо, що рівно одна із гирь легша, ніж на ній написано, а інші важать рівно стільки, скільки на них написано. Як за допомогою 2-х зважувань на двошалькових терезах визначити неправильну гирю.

Відповіді та вказівки:

№ завдання	1	2	3	4	5	6
Правильна відповідь	Г	Г	Б	Б	А	В

7. Відповідь: 130 кг

8. 25%.

9. Відповідь: 6. Розв'язання. Якщо розглянути керівництво двох підкомітетів, то вони мають рівно одного 1 спільного члена, тоді разом вони містять рівно 5 членів. Таким чином усього в комітеті мінімум 5 людей, позначимо їх числами: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Але з цих 5 членів вибрати керівництво ще одного підкомітету неможливо. Таким чином у комітеті мінімум 6 людей. З них можна утворити керівництво підкомітетів належним чином:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3\}; \{3, 4, 5\}; \{1, 5, 6\}; \{2, 4, 6\}.$$

10. Відповідь: так, можна.

Розв'язання. Покладемо на шальки при першому зважуванні гирі $1+4+9$ на ліву та $2+5+7$ на праву. Якщо маємо рівність $1+4+9=2+5+7$, то фальшива гиря серед інших трьох.

Тоді покладемо на шальки, наприклад, такі комбінації: $3+4$ та $1+6$.

- Якщо $3+4=1+6$, то ці гирі – справжні, тому фальшива 8.
- Якщо $3+4 < 1+6$, то фальшива 3, бо фальшива – більш легка і там її треба шукати. З урахуванням першого зважування нею є 3.
- Аналогічно, при $3+4 > 1+6$ фальшивою є 6.

Аналогічно, якщо при початковому зважуванні вийшла нерівність, то фальшива там, де менша вага. Решта шість гир справжні. Залишається покласти на різні шальки по одній потенційно фальшивій і врівноважити їх справжніми. Наприклад, $1+5$ та $4+2$. Далі аналогічно, фальшива на більш легкій шальці терезів, при рівновазі – та, що не покладена.



Орієнтовні критерії оцінювання завдань

+ (або **6 балів**) – задача розв’язана правильно ;

+. (або 5 балів) – задача розв’язана, але є дрібні зауваження до розв’язку ;

± (або 4 бали) – задача розв’язана в цілому (недоліки розв’язання легко усуваються) ;

+/2(або 3бали) – задача розв’язана “наполовину”, тобто є значний прогрес у розв’язуванні, але повне розв’язання потребує інших істотних ідей ;

⊥ (або 2бали) – задача не розв’язана, але підхід до розв’язання правильний ;

–.(або 1бал) – задача розв’язана неправильно, але є деякі розумні міркування ;

— (або **обалів**) — задача не розв’язувалась або розв’язання не записано;



Поради учаснику олімпіади

1. Уважно прочитайте умови задач і визначте порядок, в якому будете їх розв’язувати (краще починати з легших задач, які, як правило, розміщені на початку).
2. Якщо умову задачі можна зрозуміти різними способами, то не вибирайте найзручніший для себе, а зверніться за консультацією до членів журі.
3. Якщо неясно, чи правильне деяке твердження, спробуйте його довести або спростувати.
4. Не зациклюйтесь на одній задачі. Якщо немає ідеї розв’язання, то задачу краще (хоча б на деякий час) відкласти.
5. Розв’язавши задачу, зразу ж оформляйте розв’язання. Це допоможе перевірити його правильність і звільнить увагу для інших задач.
6. Кожен, навіть очевидний, крок розв’язання потрібно записувати. Громіздкі розв’язання краще записувати у вигляді кількох тверджень (лем).
7. Перед тим, як здати роботу, уважно перечитайте її “очима членів журі” — чи зможуть вони в ній розібратись?

Використані джерела

1. Білянiна О.Я., Білянiн Г. М. Збiрник олімпіадних задач з математики. – Чернівці: Зелена Буковина, 2000. – 76 с.
2. Бодрик О.Г., Вознюк О.В., Кузенко В.Г. та ін. Збiрник конкурсних і олімпіадних задач з математики. – К. : Діалектика, 1995. – 142 с.
3. Вороний О.М. Вибрані задачі шкільної математики. – Кіровоград: РВЦКДПУ, 2001. – 44 с.
4. Гайштут О.Г. Тренiнг iнтелекту школяра – К-П.: Абетка, 2004р. – 308 с
5. Логіка 5-11 класи/ Н.В. Василенко.-Х. : Вид. група «Основа», 2011. – 256с. – Серія «Логіка».
6. Маркова І.С. Математика в школах України. Математика після уроків – Х.: Основа, 2004р. – 144 с.
7. <http://olimpmath.blogspot.com/2014/09/8.html>